线性代数
学习指导

第2版

谢政　陈挚　编著

清华大学出版社

线性代数学习指导
（第 2 版）

谢　政　陈　挚　编著

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是与谢政编著的《线性代数》(高等教育出版社,2012)相配套的辅导教材.全书分为六章:线性方程组、矩阵、行列式、向量空间与线性空间、矩阵的相似化简、二次型.每章包括基本要求、内容综述、疑难辨析、范例精讲、同步练习、单元测验(第1章和第5章除外)、习题选解共七个部分.书末提供了四套往年期末考试试题,并给出了同步练习、单元测验和期末考试试题的参考解答.

本书既可以作为学生学习课程的辅导教材、考研复习的指导书,也可以供教师开设习题课或考研辅导课参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/谢政,陈挚编著.—2版.—北京:清华大学出版社,2018
ISBN 978-7-302-51282-0

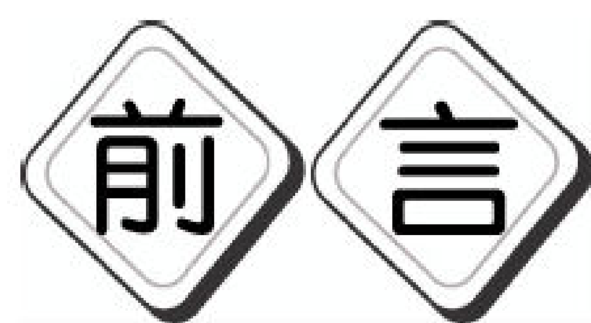
Ⅰ.①线…　Ⅱ.①谢…②陈…　Ⅲ.①线性代数—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第215354号

责任编辑: 佟丽霞　陈　明
封面设计: 傅瑞学
责任校对: 刘玉霞
责任印制: 董　瑾

出版发行: 清华大学出版社
网　　址: http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地　　址: 北京清华大学学研大厦A座　**邮　　编:** 100084
社 总 机: 010-62770175　**邮　　购:** 010-62786544
投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者: 三河市龙大印装有限公司
经　　销: 全国新华书店
开　　本: 185mm×260mm　**印　　张:** 16.25　**字　　数:** 396千字
版　　次: 2012年10月第1版　2018年9月第2版　**印　　次:** 2018年9月第1次印刷
定　　价: 39.00元

产品编号:080528-01



前言

线性代数是高等院校非数学类本科生的一门重要的数学基础课程，也是全国硕士研究生入学统一考试的必考内容. 这门课程概念抽象，结论繁多，方法灵活，计算复杂，初学者普遍感到“看书抓不住重点，做题不知如何下手，证明题没思路，计算题出错误”. 为了引导读者抓住重点、攻克难点、把握精髓、拓展视野，启迪他们发现问题、分析问题和解决问题，更好地巩固基础知识、掌握基本技能、领悟基本思想，我们编写了这本学习指导书.

本书分为六章：线性方程组、矩阵、行列式、向量空间与线性空间、矩阵的相似化简、二次型. 每章包括基本要求、内容综述、疑难辨析、范例精讲、同步练习、单元测验（第 1 章和第 5 章除外）、习题选解共七个部分.

基本要求是根据教育部审定的线性代数课程教学基本要求和全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲提出的，它明确了需要掌握的知识点，并用“理解、了解、知道”或“掌握、熟悉、会”的次序表示对基本概念和基本理论或基本方法的不同要求，使读者能心中有数，有的放矢.

内容综述系统梳理了基本概念和基本理论，简略概括了基本知识点，突出了重点与难点，厘清了各知识点之间的联系，使读者能透视脉络，总览全局.

疑难辨析是本书的特色部分，针对重点、难点内容，容易混淆的概念，以及读者遇到的带有共性的困惑，编者将三十余载的教学精华很好地凝聚在一问一答之中，用通俗易懂但不失严谨的语言剖析每一个精心设计的疑难问题，有效地帮助读者走出“问不出问题，学不会知识”的窘境，澄清模糊认识，领会问题实质.

范例精讲是本书的重要部分，选取的例题少而精，且具有很强的典型性和示范性. 除了一些重点内容、常考内容和易错内容的例题外，还有一些对后继课程学习有指导意义的例题. 编者对主要题型进行了综合分类，对解题方法进行了归纳整理，通过分析解题思路，揭示解题规律，总结解题步骤，使读者能举一反三，触类旁通.

同步练习选编了一定数量的与范例精讲搭配的题目，希望读者能同步地、有针对性地进行自我训练，以巩固所学知识，掌握各种题型的解题技巧，增强独立解题能力.

单元测验要求读者在 150 分钟内独立完成，然后按照参考解答自行评分，以检查学习效果，发现学习中存在的问题，明确努力方向，提高应试能力.

习题选解对主教材中部分的（A）类习题和全部的（B）类习题，都给出了规范、详细的解答.

书末提供了四套往年期末考试试题，读者应在学完全部内容之后再做（其他要求与单元测验完全相同），总体检验全书学习效果，同时为即将迎来的期末考试热身.

在内容综述、疑难辨析、范例精讲和习题选解四个部分中有不少评注，内容包括概念或定理的内涵与外延，相关概念或方法的异同，与已有概念或方法的类比，解题步骤的总结，方法的推广，题型的常用解法，例题的其他解法或证法，容易犯错之处等. 这些评注具有画龙点睛的作用，值得读者仔细研读、品味.

作为一本配套辅导教材，读者在认真阅读主教材的基础上再阅读本书效果会更好. 对于练习、习题和试题，读者必须先独立思考，自己动手解题，然后与题解对照比较，才可能达到理解基本概念和基本理论、掌握基本方法、训练数学思维的目的.

需要特别强调的是，本书中包含了1987—2018年全国硕士研究生入学统一考试数学试题及解答，分章别类，针对性强. 鉴于全书知识框架的完备性，恕不一一指出.

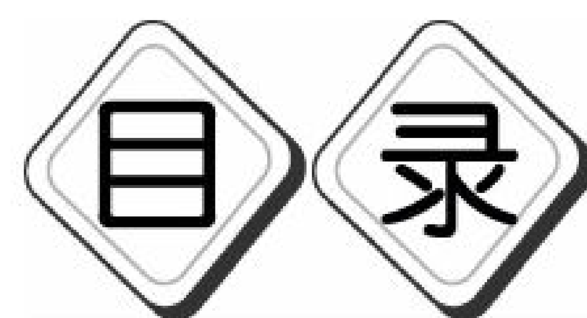
刘春林、文军、海昕、苏芳四位副教授参与了习题选解的编写，在此表示衷心的感谢.

我们真诚地希望同行和读者对本书提出宝贵的意见和建议.

编　者

2018年6月

于国防科技大学


目录

第 1 章

线性方程组

基本要求

1. 理解线性方程组的基本概念.
2. 知道线性方程组解的几何意义.
3. 熟悉阶梯方程组的回代法,了解线性方程组解的三种情况.
4. 掌握线性方程组的三种初等变换和消元法.

内容综述

一、线性方程组及其解

线性方程就是一次方程.

$m\times n$ 线性方程组是指 m 个含相同的 n 个未知量的线性方程所构成的组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

若常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 全为零,则称此方程组为 $m\times n$ 齐次线性方程组;否则称为 $m\times n$ 非齐次线性方程组.

注 “组”不同于“集合”,组中元素有序且允许重复,而集合中元素无序且相异.

用 W 表示线性方程组的解集,有相同解集的两个方程组称为同解方程组;若 $W\neq\varnothing$,则称该方程组是相容的或有解;若 $W=\varnothing$,则称该方程组为不相容的或矛盾的或无解.若 W 只含一个元素,则称该方程组有唯一解.W 中任何一个元素,称为该方程组的一个特解;W 中全部元素的一个通用表达式称为该方程组的通解或一般解.

二、二元和三元线性方程组的几何意义

二元线性方程组表示平面上若干条直线的交点,方程组有唯一解等价于所有直线交于一点;方程组有无穷多解等价于所有直线都重合;方程组无解等价于所有直线既不交于一点也不重合.

三元线性方程组表示空间中若干个平面的交点，方程组有唯一解等价于所有平面交于一点；方程组有无穷多解等价于所有平面重合或交于一条直线；方程组无解等价于所有平面没有公共交点.

三、阶梯方程组及其回代法

阶梯方程组应该满足如下两个条件：

(1) 若某个方程的未知量系数全为零，则它下方的所有方程的未知量系数均为零；

(2) 若某个方程中第一个系数不为零的未知量是 x_i，则它下方的所有方程中前 i 个未知量的系数全为零.

若阶梯方程组出现矛盾方程，则阶梯方程组无解. 否则，删去所有"0＝0"的方程后，可选每个方程的第一个未知量为基本未知量，其余未知量均为自由未知量，即

自由未知量个数＝未知量个数－方程个数，

基本未知量个数＝方程个数.

从阶梯方程组中最后一个方程开始求解，逐次将所解得的基本未知量的值代入到前一个方程中，使得该方程只含一个基本未知量，从而可以求解，这就是回代法.

当未知量个数等于方程个数时，方程组有唯一解；当未知量个数大于方程个数时，方程组有无穷多解，可用自由未知量表示出其通解.

四、线性方程组的初等变换

(1) 对调变换ⓘ↔ⓙ：对调第 i 个与第 j 个方程的位置；

(2) 倍乘变换 kⓙ：以数 $k\neq 0$ 乘以第 j 个方程；

(3) 倍加变换ⓘ+kⓙ：将第 j 个方程的 k 倍加到第 i 个方程上.

三种初等变换的逆变换：

ⓘ↔ⓙ的逆变换是ⓘ↔ⓙ；

kⓙ的逆变换是$\frac{1}{k}$ⓙ；

ⓘ＋kⓙ的逆变换是ⓘ－kⓙ.

初等变换具有如下性质：

(1) 一个线性方程组经有限次初等变换得到的必是同解方程组，即有限次初等变换不改变方程组的解集.

(2) 任何一个线性方程组都可以经过有限次初等变换化成阶梯方程组.

利用初等变换逐次消去一些方程中的未知量，化一般线性方程组为阶梯方程组的过程称为消元.

用消元和回代两个过程求解线性方程组的方法称为消元法.

疑难辨析

问题 1 一个线性方程组经过初等变换后，出现"0＝0"的方程有什么含义？

答 对一个线性方程组做初等变换后，出现 k 个"0＝0"的方程，则表明线性方程组中有

k 个方程是多余的,即去掉这 k 个方程不会改变方程组的解集.例如,在线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3=1, \\ x_1-4x_2-2x_3=3, \\ 2x_1+7x_2+11x_3=0 \end{cases}$$

中,将第一个方程的(-3)倍、第二个方程都加到第三个方程,得到方程 $0=0$,这说明该方程组的解完全由前两个方程确定,所以第三个方程可以去掉,即第三个方程是多余的.

问题 2 给定有限个平面,不画图能否确定这些平面的位置关系?

答 能.例如,给定三个平面方程

$$\pi_1: x_1+x_2-x_3=2,$$
$$\pi_2: x_1+2x_2+x_3=3,$$
$$\pi_3: -x_1+2x_2+3x_3=1.$$

为了考查 π_1 与 π_2 的位置关系,只需将它们对应的两个方程联立成线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2, \\ x_1+2x_2+x_3=3, \end{cases}$$

做初等变换得阶梯方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2, \\ x_2+2x_3=1, \end{cases}$$

即知方程组有无穷多解,故 π_1 与 π_2 相交.同理 π_1 与 π_3,π_2 与 π_3 都相交.

将 π_1,π_2 和 π_3 对应的三个方程联立成线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2, \\ x_1+2x_2+x_3=3, \\ -x_1+2x_2+3x_3=1, \end{cases}$$

通过初等变换得到阶梯方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=2, \\ x_2+2x_3=1, \\ -4x_3=0, \end{cases}$$

方程组有唯一解 $x_1=1,x_2=1,x_3=0$,即三个平面 π_1,π_2 和 π_3 交于点$(1,1,0)$.

问题 3 线性方程组为何不会出现有 $k(1<k<\infty)$个解的情况?

答 下面以 $m\times3$ 线性方程组为例给出几何解释.在空间直角坐标系中,m 个方程组对应于 m 个平面 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_m$,方程组的每个解对应于空间中一个点.假如该方程组有 k 个解,$k\geqslant2$,则空间中至少有两点 A 和 B 均在平面 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_m$ 上,从而过 A,B 两点的直线 L 也在这 m 个平面,即直线 L 上的点都是该方程组的解,此与方程组只有有限个解相矛盾.

问题 4 当 $m<n$ 时,$m\times n$ 线性方程组的解会出现什么情况?

答 经过有限次初等变换可以将 $m\times n$ 线性方程组化成阶梯方程组,如果阶梯方程组中最后一个方程是“$0=d(d\neq0)$”,则 $m\times n$ 线性方程组无解;如果最后一个方程含有未知量,则线性方程组有解,此时阶梯方程组中方程个数 $r\leqslant m$,从而 $r<n$,于是至少有一个自由未知量,故 $m\times n$ 线性方程组有无穷多解.这表明 $m<n$ 时 $m\times n$ 线性方程组不会有唯一解.

问题 5 当线性方程组有无穷多解时,自由未知量可以任意选取吗?

答 不可以.例如,对线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \end{cases}$$

做倍加变换②—2①,得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_3 = -1, \end{cases}$$

这个 2×3 阶梯方程组有 1 个自由未知量,但 x_3 不能选作自由未知量,可选 x_1 或 x_2 为自由未知量.为防止选错,可选阶梯方程组中每个方程的第一个未知量为基本未知量,余下的未知量就是自由未知量.

范例精讲

题型 1　非齐次线性方程组的求解

例 1　判断下列非齐次线性方程组是否有解.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 11x_1 + 3x_2 = 8. \end{cases}$$

解　对方程组做初等变换,得

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 11x_1 + 3x_2 = 8, \end{cases} \xrightarrow[③-3②]{②-①} \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -8, \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 2, \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{②-3① \\ ③+①}]{①\leftrightarrow②} \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -8, \\ -10x_2 + 11x_3 = 34, \\ 0 = -6. \end{cases}$$

因第三个方程为矛盾方程,故该方程组无解.

例 2　求下列非齐次方程组的通解:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 13, \\ 4x_1 - x_2 + 9x_3 = -6, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5. \end{cases}$$

解　对方程组做初等变换,得

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 13, \\ 4x_1 - x_2 + 9x_3 = -6, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5, \\ 7x_2 - 7x_3 = 14, \\ 14x_2 - 14x_3 = 28, \\ 7x_2 - 7x_3 = 14, \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5, \\ x_2 - x_3 = 2, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = -1, \\ x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

取 x_3 为自由未知量,从而求得方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - 1, \\ x_2 = \quad x_3 + 2, \\ x_3 = \quad x_3, \end{cases} \quad x_3 \text{ 为任意数.}$$

注 消元法的一般步骤是：

(a) 将线性方程组做初等变换，化为阶梯方程组.

(b) 如果出现矛盾方程，则原方程组无解.

(c) 当线性方程组有解时，用回代法求出阶梯方程组的解.

题型 2 齐次线性方程组的求解

例 3 求下列齐次方程组的通解：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

解 对方程组做初等变换，得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ \qquad -4x_3 \qquad = 0, \\ \qquad -4x_3 \qquad = 0, \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad - x_4 = 0, \\ \qquad x_3 \qquad = 0. \end{cases}$$

取 x_2, x_4 为自由未知量，从而方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4, \\ x_2 = \quad x_2, \\ x_3 = \quad 0, \\ x_4 = \qquad x_4, \end{cases} \quad x_2, x_4 \text{ 为任意数.}$$

注 齐次线性方程组的解有两种情况：一是只有零解，即有唯一解；二是有非零解，从而有无穷多解.

题型 3 含参线性方程组的解的讨论

例 4 设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4, \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases}$$

(1) k 取何值时，方程组无解？

(2) k 取何值时，方程组有唯一解？

(3) k 取何值时，方程组有无穷多解？并求方程组的通解.

解 对方程组做初等变换，得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + kx_3 = 4, \\ -x_1 + kx_2 + x_3 = k^2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + \qquad x_2 + \qquad kx_3 = 4, \\ \quad (k+1)x_2 + (k+1)x_3 = k^2 + 4, \\ \quad -2x_2 + (2-k)x_3 = -8, \end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=4, \\ 2x_2+(k-2)x_3=8, \\ \frac{1}{2}(k+1)(4-k)x_3=k(k-4). \end{cases}$$

(1) 当 $k=-1$ 时，方程组无解；

(2) 当 $k\neq-1$ 且 $k\neq4$ 时，方程组有唯一解. 对方程组继续做初等变换，得

$$\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=4, \\ 2x_2+(k-2)x_3=8, \\ \frac{1}{2}(k+1)(4-k)x_3=k(k-4), \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{k^2+2k}{k+1}, \\ x_2=\frac{k^2+2k+4}{k+1}, \\ x_3=-\frac{2k}{k+1}. \end{cases}$$

因此方程组的唯一解为

$$x_1=\frac{k^2+2k}{k+1}, x_2=\frac{k^2+2k+4}{k+1}, x_3=-\frac{2k}{k+1}.$$

(3) 当 $k=4$ 时，方程组有无穷多解，此时方程组化为

$$\begin{cases} x_1+x_2+4x_3=4, \\ x_2+x_3=4, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1+3x_3=0, \\ x_2+x_3=4, \end{cases}$$

取 x_3 为自由未知量，从而方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1=-3x_3, \\ x_2=-x_3+4, \\ x_3=x_3. \end{cases} \quad x_3 \text{ 为任意数.}$$

注 含参线性方程组解的讨论方法归纳如下：

(a) 对线性方程组做初等变换，将其化为阶梯方程组.

(b) 根据参数的不同取值，讨论方程组是无解、有唯一解还是有无穷多解.

例 5 设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2. \end{cases}$$

问当 a,b 取何值时，方程组有解，并求方程组的通解.

解 对方程组做初等变换，得

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b, \\ 0=b-3a, \\ 0=1-a. \end{cases}$$

当 $a=1$ 且 $b=3$ 时，方程组有无穷多解. 此时方程组等价于

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1-x_3-x_4-5x_5=-2, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=1, \end{cases}$$

取 x_3,x_4,x_5 为自由未知量,从而方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5 - 2, \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 + 1, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4, \\ x_5 = x_5, \end{cases} \quad x_3,x_4,x_5 \text{ 为任意数.}$$

注 4×5 线性方程组不会有唯一解,参见本章疑难辨析中问题 4.

同步练习

1. 填空题

(1) 线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 10, \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$ 的解为________.

(2) 齐次方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ 的通解中含自由未知量的个数为________.

(3) 设方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + kx_2 = 0 \end{cases}$ 有非零解,则 $k=$________.

(4) 设方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + 3x_2 + (a+8)x_3 = 8, \end{cases}$ 当 $a=$________时,方程组无解.

(5) 若方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = \lambda, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 5, \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2\lambda \end{cases}$ 有解,则 $\lambda=$________.

2. 已知平面上三条不同的直线方程分别为

$$l_1: x_1 - 2x_2 = 0, \quad l_2: x_1 + 2x_2 = 4, \quad l_3: x_1 - x_2 = a,$$

问 a 取何值时三条直线交于一点?

3. 求下列非齐次方程组的通解:

(1) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 11, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 6x_1 - 9x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases}$

4. 求解下列齐次线性方程组:

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

5. 讨论当 a,b 取何值时，齐次方程组

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+bx_2+x_3=0, \\ x_1+2bx_2+x_3=0 \end{cases}$$

有非零解？并求出该方程组的所有解.

6. 讨论当 a,b 取何值时，非齐次方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_2+2x_3+2x_4=1, \\ x_2+(3-a)x_3+2x_4=b, \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$$

有唯一解、无解、无穷多解？在方程组有解时，求出该方程组的所有解.

7. 在光合作用下，植物利用太阳光的辐射能量把二氧化碳(CO_2)和水(H_2O)转化成葡萄糖($C_6H_{12}O_6$)和氧气(O_2)，其化学反应方程式为



$$x_1CO_2+x_2H_2O \longrightarrow x_3C_6H_{12}O_6+x_4O_2,$$

试确定 x_1,x_2,x_3 和 x_4，将方程式配平.

习题选解

(A)

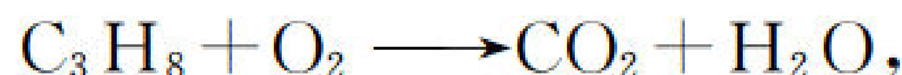
4. 已知 $A(1,-5),B(-1,1)$ 和 $C(2,7)$ 三点位于抛物线 $p(x)=ax^2+bx+c$ 上，求参数 a,b,c，并确定抛物线方程.

解 将 A,B 和 C 三点的坐标分别代入抛物线表达式，得到如下关于 a,b,c 的线性方程组

$$\begin{cases} a+b+c=-5, \\ a-b+c=1, \\ 4a+2b+c=7, \end{cases}$$

解方程组得 $a=5,b=-3,c=-7$. 从而抛物线方程为 $p(x)=5x^2-3x-7$.

5. 燃烧丙烷(C_3H_8)时，丙烷与氧气(O_2)发生反应生成二氧化碳(CO_2)和水(H_2O)，其方程式为



$$C_3H_8+O_2 \longrightarrow CO_2+H_2O,$$

请配平上述方程式.

解 设方程式中 C_3H_8、O_2、CO_2 和 H_2O 的系数分别为 x_1,x_2,x_3,x_4，因为方程式左右两端 C、H、O 的原子数对应相等，所以有

$$\begin{cases} 3x_1=x_3, \\ 8x_1=2x_4, \\ 2x_2=2x_3+x_4, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} 3x_1-x_3=0, \\ 8x_1-2x_4=0, \\ 2x_2-2x_3-x_4=0, \end{cases}$$

用消元法求得通解

$$x_1=k, \quad x_2=5k, \quad x_3=3k, \quad x_4=4k, \quad k \text{ 为任意数}.$$

取 $k=1$，得配平后的方程式 $C_3H_8+5O_2=3CO_2+4H_2O$.

(B)

6. 以三元线性方程组为例直接说明：若一个线性方程组有两个不同的解，则必有无穷多解.

解 对于给定的 $m\times 3$ 线性方程组，在空间直角坐标系中，m 个方程组对应于 m 个平面 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_m$，方程组的每个解对应于空间中一个点. 设该方程组有两个解，即空间中有两点 A 和 B 均在平面 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_m$ 上，从而过 A,B 两点的直线也在这 m 个平面上，于是该方程组有无穷多解.

7. 对于空间中任意给定的三个平面，讨论它们的各种位置关系，并指出它们的公共点的数量.

解 空间中平面方程为一个三元线性方程，这三个平面的公共点与三个线性方程构成的方程组的解相对应，因此有下面的结果.

(1) 方程组无解当且仅当三平面无公共交点.

此时，或三个平面两两平行，或其中两个平面平行而第三个平面与前两个平面相交，或三个平面两两相交但无公共交点.

(2) 方程组有唯一解当且仅当三平面仅有一个公共交点.

此时，三个平面交于一点.

(3) 方程组有无穷多解当且仅当三平面有无穷多个公共交点.

此时，或三平面相交于一条公共直线，或三个平面重合.

8. 试问参数 t 取什么值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-4, \\ x_1+x_2+tx_3=4, \\ x_1-tx_2-x_3=-t^2 \end{cases}$$

无解，有唯一解，有无穷多解？

解 对方程组做初等变换，得

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-4, \\ x_1+x_2+tx_3=4, \\ x_1-tx_2-x_3=-t^2, \end{cases} \to \begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 2x_2+(t-2)x_3=8, \\ (1-t)x_2-3x_3=4-t^2, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 2x_2+(t-2)x_3=8, \\ (t-4)(t+1)x_3=2t(4-t). \end{cases}$$

当 $t=4$ 时，对原线性方程组做初等变换，得

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 2x_2+2x_3=8, \end{cases} \to \begin{cases} x_1=-3x_3, \\ x_2=-x_3+4, \end{cases}$$

故方程组有无穷多解.

当 $t=-1$ 时，线性方程组变为

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 2x_2-3x_3=8, \\ 0=-10, \end{cases}$$

方程组中出现矛盾方程，故方程组无解.

综上，当 $t=-1$ 时，该线性方程组无解；当 $t=4$ 时，该线性方程组有无穷多解；当 $t\neq 4$ 且 $t\neq -1$ 时，该方程组有唯一解.

9. 讨论参数 a 取何值时，使得线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+ax_2+x_3=a, \\ x_1+x_2+ax_3=a^2 \end{cases}$$

的解中每个未知量的取值都是正整数.

解 对线性方程组做初等变换，得

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+ax_2+x_3=a, \\ x_1+x_2+ax_3=a^2, \end{cases} \to \begin{cases} (1-a)x_2+(1-a^2)x_3=1-a^3, \\ (a-1)x_2+(1-a)x_3=a-a^2, \\ x_1+x_2+ax_3=a^2, \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x_1+x_2+ax_3=a^2, \\ (a-1)x_2-(a-1)x_3=-a(a-1), \\ -(a-1)(a+2)x_3=-(a-1)(a+1)^2. \end{cases}$$

当 $a=-2$ 时，方程组无解.

当 $a=1$ 时，方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1=-x_2-x_3+1, \\ x_2=x_2, \\ x_3=x_3, \end{cases}$$

此时线性方程组的解中每个未知量的取值不可能同时为正整数.

当 $a\neq 1$ 且 $a\neq -2$ 时，原方程组可化为

$$\begin{cases} x_1+x_2+ax_3=a^2, \\ x_2-x_3=-a, \\ x_3=\dfrac{(a+1)^2}{a+2}, \end{cases}$$

经过回代，得到方程组的唯一解

$$\begin{cases} x_1=-\dfrac{a+1}{a+2}, \\ x_2=\dfrac{1}{a+2}, \\ x_3=\dfrac{(a+1)^2}{a+2}. \end{cases}$$

若解中每个未知量的取值均为正整数，必有 $a+1<0$ 且 $a+2>0$，即 $-2<a<-1$. 又由 $-\dfrac{a+1}{a+2}$ 和 $\dfrac{(a+1)^2}{a+2}$ 为正整数可知 $a+1$ 为整数，即 a 为整数，矛盾！故此时亦无法保证线性方程组的解向量中每个未知量的取值均为正整数.

综上所述，无论参数 a 取何值，均不能使得方程组的解中每个未知量的取值都是正整数.

10. 某种减肥食品由脱脂牛奶、大豆粉、乳清和离析大豆蛋白四种食物混合而成. 这些食物中每100g含蛋白质、碳水化合物、脂肪三种营养成分的量(单位: g)以及减肥食品所提供的营养(单位: g)如表1.1所示.

(1) 该减肥食品需要这四种食物各多少?

(2) 用脱脂牛奶、大豆粉、乳清能配制该减肥食品吗?

(3) 用脱脂牛奶、乳清、离析大豆蛋白能配制该减肥食品吗?

表1.1 每100g食物中营养含量及减肥食品所需的营养总量

	脱脂牛奶	大豆粉	乳清	离析大豆蛋白	所需营养总量
蛋白质	36	51	13	80	33
碳水化合物	52	34	74	0	45
脂肪	0	7	1.1	3.4	3

解 (1) 设该减肥食品需要脱脂牛奶、大豆粉、乳清和离析大豆蛋白各 x_1, x_2, x_3, x_4 个单位. 依题意有

$$\begin{cases} 36x_1+51x_2+13x_3+80x_4=33, \\ 52x_1+34x_2+74x_3=45, \\ 7x_2+1.1x_3+3.4x_4=3, \end{cases}$$

用消元法解得通解

$$\begin{cases} x_1=-0.659181k+0.17626, \\ x_2=-0.275523k+0.349721, \\ x_3=0.5898k+0.323567, \\ x_4=0.376435k+0.0576562, \end{cases} \quad k \text{ 为任意数}.$$

因此, 取定 k 的一个值, 即可得所需四种食物的量.

注 该减肥食品的原料配比不唯一; x_1, x_2, x_3, x_4 的取值应为正数.

(2) 由(1)知

$$\begin{cases} 36x_1+51x_2+13x_3=33, \\ 52x_1+34x_2+74x_3=45, \\ 7x_2+1.1x_3=3, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1=0.277223, \\ x_2=0.391921, \\ x_3=0.233231. \end{cases}$$

因此, 用脱脂牛奶、大豆粉、乳清配制该减肥食品是可行的.

(3) 由(1)知

$$\begin{cases} 36x_1+13x_3+80x_4=33, \\ 52x_1+74x_3=45, \\ 1.1x_3+3.4x_4=3, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = -0.660438, \\ x_3 = 1.0722, \\ x_4 = 0.535465, \end{cases}$$

x_1 取值为负数,不符合题意.因此,用脱脂牛奶、乳清、离析大豆蛋白无法配制该减肥食品.

11. 如图1.1所示的交通流量图,其中 $a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2,b_3,b_4$ 为参数,x_1,x_2,x_3,x_4 为未知量.试建立交通流量的线性方程组;请问八个参数取何值时方程组有解?求出方程组的解.

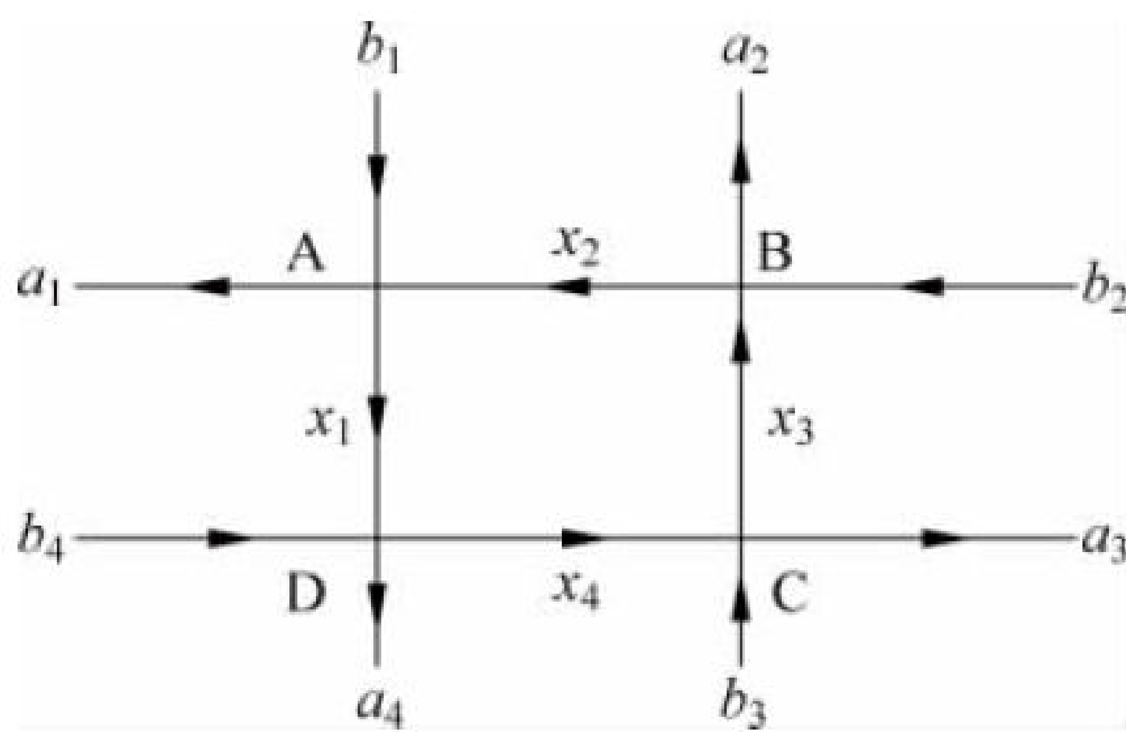


图1.1 交通流量图

解 由于A,B,C,D四点的流出、流入量应保持平衡,故

$$\begin{cases} x_1+a_1=x_2+b_1, \\ x_2+a_2=x_3+b_2, \\ x_3+a_3=x_4+b_3, \\ x_4+a_4=x_1+b_4, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1-x_2 = -a_1+b_1, \\ x_2-x_3 = -a_2+b_2, \\ x_3-x_4 = -a_3+b_3, \\ -x_1+x_4 = -a_4+b_4, \end{cases}$$

对方程组做初等变换,得阶梯方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2 = -a_1+b_1, \\ x_2-x_3 = -a_2+b_2, \\ x_3-x_4 = -a_3+b_3, \\ 0 = \sum_{i=1}^{4} b_i - \sum_{i=1}^{4} a_i, \end{cases}$$

因此参数满足 $\sum_{i=1}^{4} b_i = \sum_{i=1}^{4} a_i$ 时方程组有解.此时方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = k+a_4-b_4, \\ x_2 = k-a_2-a_3+b_2+b_3, \\ x_3 = k-a_3+b_3, \\ x_4 = k, \end{cases} \quad k \text{ 为任意数}.$$

12. 求图 1.2 所示的电路中各支路电流.

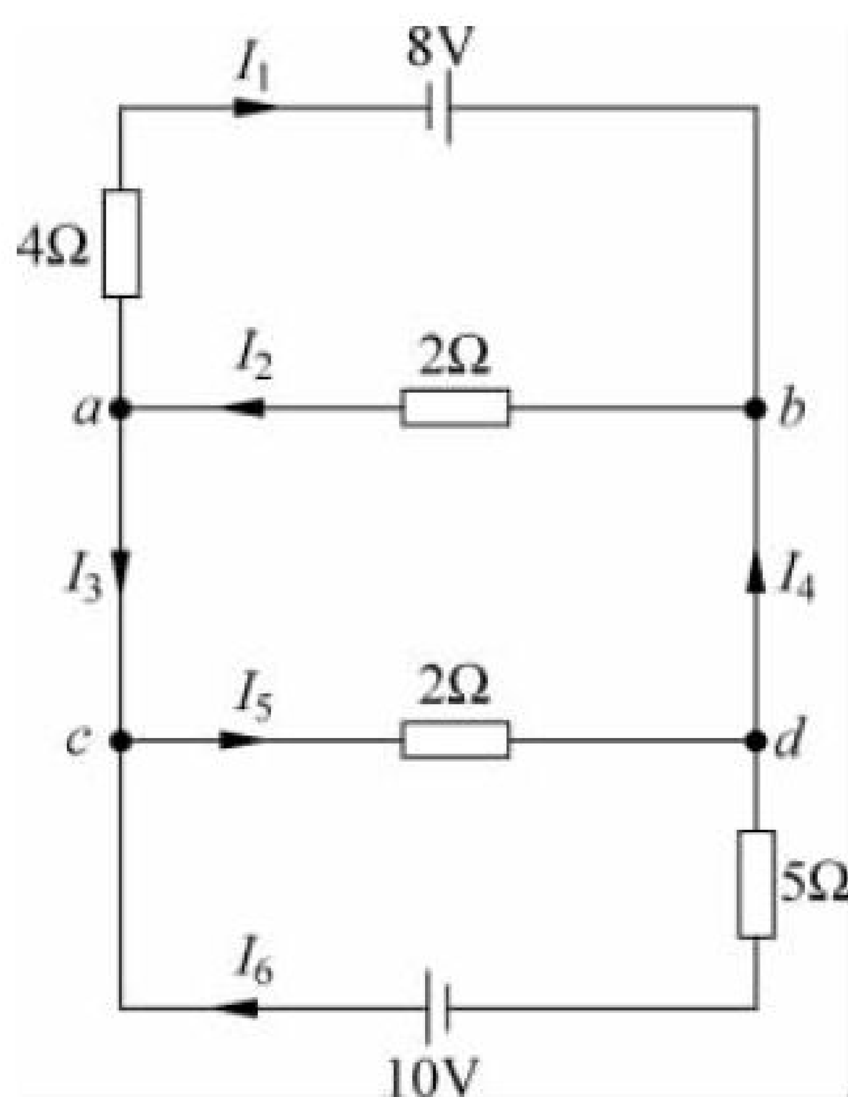


图 1.2 电路网络

解 对节点 a,b,c,d 应用 Kirchhoff 电流定律,得

$$I_2 = I_1 + I_3,$$
$$I_1 + I_4 = I_2,$$
$$I_3 + I_6 = I_5,$$
$$I_5 = I_4 + I_6.$$

对上、中、下三个回路应用 Kirchhoff 电压定律,得

$$4I_1 + 2I_2 = 8,$$
$$2I_2 + 4I_5 = 0,$$
$$4I_5 + 5I_6 = 10.$$

联立上述 7 个方程,得到 7×6 线性方程组,解得

$$I_1 = 2\text{A}, \quad I_2 = 0\text{A}, \quad I_3 = I_4 = -2\text{A}, \quad I_5 = 0\text{A}, \quad I_6 = 2\text{A},$$

其中 $I_3 = I_4 = -2\text{A}$ 表示 I_3 和 I_4 的实际方向与图 1.2 中所示的方向相反.

第2章

矩　阵

基本要求

1. 理解矩阵的概念，知道矩阵的实际背景，了解特殊矩阵的定义和性质.

2. 理解矩阵的加法、数乘、乘法、转置、逆、分块及其运算规律，知道两组变量之间的线性映射和线性变换.

3. 理解矩阵的初等变换和初等矩阵的概念及性质，掌握用初等变换化矩阵为阶梯矩阵、最简阶梯矩阵和等价标准形的方法.

4. 理解矩阵等价和矩阵秩的概念及性质.

5. 掌握用矩阵的初等变换求解线性方程组、求矩阵的秩和逆矩阵的方法.

6. 了解分块矩阵的概念及运算规律，知道分块初等变换和分块初等矩阵的概念和性质.

7. 理解用秩给出的线性方程组解的判别准则.

8. 了解矩阵方程解的判别准则，会求解矩阵方程.

内容综述

一、矩阵的概念

一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$是指由 mn 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$排成的 m 行 n 列的矩形数表. a_{ij}称为 $\boldsymbol{A}$ 的(i,j)元.

$m\times n$ 实(或复)矩阵的全体记作$\mathbb{R}^{m\times n}$(或$\mathbb{C}^{m\times n}$)，用$\mathbb{F}^{m\times n}$表示$\mathbb{R}^{m\times n}$或者$\mathbb{C}^{m\times n}$.

行数等于列数的矩阵称为方阵.

行数相等、列数也对应相等的两个矩阵称为同型矩阵.

对应元相等的两个同型矩阵称为相等矩阵.

二、特殊矩阵

1. 行矩阵(或行向量)：只有一行的矩阵.

2. 列矩阵(或列向量)：只有一列的矩阵.

3. 零矩阵$\boldsymbol{0}$：元全为零的矩阵.

4. 基本矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$：(i,j)元为 1、其余元全为零的矩阵.
5. 对角矩阵：主对角线以外的元都是零的方阵.
6. 数量矩阵：主对角元相等的对角矩阵.
7. 单位矩阵 $\boldsymbol{E}$：主对角元都是 1 的对角矩阵.
8. 上三角矩阵：主对角线下方的元都为零的方阵.
9. 下三角矩阵：主对角线上方的元都为零的方阵.
10. 对称矩阵：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.
11. 反对称矩阵：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$.
12. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换：$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

三、矩阵的运算

1. 矩阵的加减法：设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$，则 $\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=[a_{ij}\pm b_{ij}]_{m\times n}$.

注　只有同型矩阵才能进行加法和减法运算.

运算规律：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A},\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}),\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}.$$

注　在矩阵加法中，零矩阵有类似数的加法中数 0 的作用.

2. 矩阵的数乘：设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，$k\in\mathbb{F}$，则 $k\boldsymbol{A}=[ka_{ij}]_{m\times n}$.

矩阵的加法和数乘统称为矩阵的线性运算.

运算规律：

$$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A},\quad k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A},\quad k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B},\quad (k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}.$$

3. 矩阵的乘法：设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{s\times n}$，则 $\boldsymbol{AB}=[c_{ij}]_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},\quad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n.$$

注　只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘；矩阵的乘法不满足交换律.

运算规律：

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}),\quad k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B}),$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC},\quad (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{D}=\boldsymbol{BD}+\boldsymbol{CD},$$
$$\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n,\quad k\boldsymbol{A}_{m\times n}=(k\boldsymbol{E}_m)\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}(k\boldsymbol{E}_n).$$

注　在矩阵乘法中，单位矩阵有类似数的乘法中数 1 的作用.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能与所有 n 阶矩阵可交换的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶数量矩阵.

4. 从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的线性映射是指有关系式

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}.$$

当 $m=n$ 时，称为从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的线性变换.

从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的线性映射与 $m\times n$ 矩阵一一对应，矩阵的乘法对应于线性映射的复合.

5. 矩阵的幂：设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}, k\in\mathbb{F}$，则 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}_n, \boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}$.

6. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式是指矩阵

$$f(\boldsymbol{A})=a_m\boldsymbol{A}^m+a_{m-1}\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}.$$

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意两个多项式 $f(\boldsymbol{A})$ 与 $g(\boldsymbol{A})$ 是可交换的.

7. 矩阵的转置：设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，则转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的 (i,j) 元为 $a_{ji}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$.

运算规律：

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},\quad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},\quad (k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\quad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

8. 矩阵的逆：设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，若存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵或 $\boldsymbol{A}$ 的逆. 若 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵不存在，则称 $\boldsymbol{A}$ 为不可逆矩阵.

矩阵的逆的性质：

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A},\quad (k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}(k\neq 0),\quad (\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1},\quad (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

注 虽然矩阵的逆是由除法引出的，但是绝不能将 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 写成 $\frac{1}{\boldsymbol{A}}$ 或 $\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{A}}$.

四、分块矩阵的运算

1. 矩阵分块的三种常用方法：

(1) 按矩阵的特点分块；

(2) 按列分块；

(3) 按行分块.

2. 分块矩阵的运算：只需将分块矩阵的子块看做是元，则分块矩阵的运算与普通矩阵的运算相同，而且有相同的运算规律.

(1) 分块矩阵的加减法：设分块矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_{ij}]_{s\times t}, \boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_{ij}]_{s\times t}$，其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 为同型矩阵 $(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,t)$，则 $\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{A}_{ij}\pm\boldsymbol{B}_{ij}]_{s\times t}$.

(2) 分块矩阵的数乘：设分块矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_{ij}]_{s\times t}$，$k$ 是常数，则 $k\boldsymbol{A}=[k\boldsymbol{A}_{ij}]_{s\times t}$.

(3) 分块矩阵的乘法：设分块矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_{ij}]_{s\times t}, \boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_{ij}]_{t\times r}$，且 $\boldsymbol{A}_{i1},\boldsymbol{A}_{i2},\cdots,\boldsymbol{A}_{it}$ 的列数依次等于 $\boldsymbol{B}_{1j},\boldsymbol{B}_{2j},\cdots,\boldsymbol{B}_{tj}$ 的行数，则 $\boldsymbol{AB}=[\boldsymbol{C}_{ij}]_{s\times r}$，其中

$$\boldsymbol{C}_{ij}=\sum_{k=1}^{t}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj},\quad i=1,2,\cdots,s;\ j=1,2,\cdots,r.$$

(4) 分块矩阵的转置：设分块矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_{ij}]_{s\times t}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{A}_{ji}^{\mathrm{T}}]_{t\times s}$.

(5) 分块对角矩阵的幂：

$$(\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s))^k=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1^k,\boldsymbol{A}_2^k,\cdots,\boldsymbol{A}_s^k).$$

(6) 分块矩阵求逆：

分块对角矩阵的逆

$$(\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s))^{-1}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1^{-1},\boldsymbol{A}_2^{-1},\cdots,\boldsymbol{A}_s^{-1}),$$

这里 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 均为可逆矩阵.

分块三角矩阵的逆

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{0}\\-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为可逆矩阵.

五、矩阵的初等变换与初等矩阵

1. 初等行(或列)变换

(1) 对调行(或列)变换 $r_i \leftrightarrow r_j$(或 $c_i \leftrightarrow c_j$):对调第 i 行(或列)与第 j 行(或列);

(2) 倍乘行(或列)变换 kr_i(或 kc_i):以数 $k \neq 0$ 乘第 i 行(或列);

(3) 倍加行(或列)变换 $r_i + kr_j$(或 $c_i + kc_j$):将第 j 行(或列)的 k 倍加到第 i 行(或列).

初等行变换和初等列变换统称为初等变换.

矩阵的初等变换都是可逆的,且其逆变换也是同一种类的初等变换.

2. 阶梯矩阵和最简阶梯矩阵

阶梯矩阵是满足下面两个条件的矩阵:

(1) 零行(元全为零的行)位于所有非零行(含非零元的行)的下方;

(2) 各非零行中第一个非零元的列标随着行标的增大而严格增大.

最简阶梯矩阵是具有如下特点的阶梯矩阵:

(1) 非零行的第一个非零元为 1;

(2) 第一个非零元所在列的其余元全为零.

有限次初等行变换可以把矩阵化为阶梯矩阵或者最简阶梯矩阵.

3. 矩阵的等价标准形

非零矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的等价标准形为 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}_{m\times n}$;

任何矩阵总可以经过有限次初等变换化为等价标准形.

4. 矩阵的等价

如果 $\boldsymbol{A}$ 可经有限次初等变换化为 $\boldsymbol{B}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{B}$,记为 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$.

矩阵的等价关系具有反身性、对称性和传递性.

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m \times n$ 矩阵,则 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$ 当且仅当存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{B}$.

5. 初等矩阵

初等矩阵是由单位矩阵进行一次初等变换得到的矩阵.

三种初等变换对应着三种初等矩阵 $\boldsymbol{P}(i,j)$,$\boldsymbol{P}(i(k))$ 和 $\boldsymbol{P}(i,j(k))$.

(1) 初等矩阵的转置矩阵仍然是初等矩阵,且

$$\boldsymbol{P}(i,j)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}(i,j),\quad \boldsymbol{P}(i(k))^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}(i(k)),\quad \boldsymbol{P}(i,j(k))^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}(j,i(k)).$$

(2) 初等矩阵都是可逆的,它们的逆矩阵仍为同一种类的初等矩阵,即

$$\boldsymbol{P}(i,j)^{-1} = \boldsymbol{P}(i,j),\quad \boldsymbol{P}(i(k))^{-1} = \boldsymbol{P}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right),\quad \boldsymbol{P}(i,j(k))^{-1} = \boldsymbol{P}(i,j(-k)).$$

(3) 对矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 进行一次某种初等行(或列)变换,相当于用同种 m 阶初等矩阵左乘(或 n 阶初等矩阵右乘)矩阵 $\boldsymbol{A}$.

6. 初等变换与可逆矩阵

(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 可以只经过有限次初等行变换或者只经过有限次初等列变换化为单位矩阵.

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 可以表示成有限个初等矩阵的乘积.

7. 分块初等变换与分块初等矩阵

(1) 分块初等变换是指将分块矩阵的块视为元所进行的“初等变换”.

(2) 分块初等矩阵总是可逆矩阵.

(3) 若分块矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次分块初等变换化为分块矩阵 $\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

(4) 对分块矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行某种初等行(或列)变换,相当于用相应的分块初等矩阵左(或右)乘矩阵 $\boldsymbol{A}$.

六、矩阵的秩

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的等价标准形中 1 的个数称为 $\boldsymbol{A}$ 的秩,记为 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}$.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,当 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}=m$ 时,称 $\boldsymbol{A}$ 为行满秩矩阵;当 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}=n$ 时,称 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩矩阵;行满秩的方阵称为满秩矩阵.满秩矩阵就是可逆矩阵,不可逆方阵称为降秩矩阵.

(1) 任何矩阵都有唯一的等价标准形.

(2) 初等变换不改变矩阵的等价标准形,从而不改变矩阵的秩.

(3) 同型矩阵等价的充要条件是有相同的等价标准形,即有相同的秩.

(4) n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}=n$.

(5) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换化为阶梯矩阵或最简阶梯矩阵 $\boldsymbol{B}$ 后,$\boldsymbol{B}$ 中非零行的数目就是 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{P}$ 为 m 阶可逆矩阵,$\boldsymbol{Q}$ 为 n 阶可逆矩阵,则

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{PA})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{AQ})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{PAQ})=\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}.$$

(7) 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是满秩矩阵,且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

七、线性方程组解的判别准则

1. 对于 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,有:

(1) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解的充要条件是 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}<\mathrm{rank}[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]$;

(2) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充要条件是 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}=\mathrm{rank}[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]=n$;

(3) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充要条件是 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}=\mathrm{rank}[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]<n$.

2. n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件是 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}<n$.

3. 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的充要条件是 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}=\mathrm{rank}[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}]$.

疑难辨析

问题 1 “数”与“矩阵”这两个概念有何关系?它们的运算有什么异同?

答 矩阵是由若干行若干列数组成的矩形数表,它表示一批有内在联系的数.或者说矩阵是数的推广.一阶矩阵可以视作数,一般不能将数当做一阶矩阵.

矩阵的运算是对数进行“批处理”.矩阵的加法、数乘、求逆与数的加法、乘法、求逆是类似的,不同的是矩阵的乘法.

矩阵与两组变量之间的线性映射一一对应,矩阵的乘法与线性映射的复合一一对应,矩

阵的乘法不满足交换律源于映射的复合不满足交换律. 正是这种复杂的矩阵乘法开辟了矩阵的一片广阔的新天地.

问题 2 为什么双重有限求和符号可以交换次序?

答 在线性代数的许多证明过程中,经常会用到双重有限求和符号交换次序,即

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}.$$

下面来证明这个等式. 上式中 mn 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 可以排成一个 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}.$$

要证明的等式的左端是先将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行的 n 个数加起来得 $S_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}$, 再将 m 个行的和数 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 相加而成的; 等式的右端是先将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列的 m 个数加起来得 $T_j=\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}$, 再将 n 个列的和数 $T_1,T_2,\cdots,T_n$ 相加而成的,即等式的左右两端都是 mn 个数之和,所以等式成立.

问题 3 如果同阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不是可交换的,是否有 $(\boldsymbol{AB})^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$?

答 不一定. 例如

(1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$, 但 $(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$;

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$, 且 $(\boldsymbol{AB})^2\neq\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$.

问题 4 为什么不能将 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 写成 $\dfrac{1}{\boldsymbol{A}}$ 或 $\dfrac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{A}}$?

答 如果可以将 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 写成 $\dfrac{1}{\boldsymbol{A}}$ 或 $\dfrac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{A}}$, 那么就难以区分 $\dfrac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 还是 $\boldsymbol{BA}^{-1}$.

问题 5 怎样理解公式 $(\boldsymbol{BA})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$? 这里 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶可逆矩阵.

答 一个方阵对应于一个线性变换,那么逆矩阵就对应于该线性变换的逆变换. 如果用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示穿袜子、$\boldsymbol{B}$ 表示穿鞋子,则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 表示脱袜子、$\boldsymbol{B}^{-1}$ 表示脱鞋子. 穿的时候是先穿袜子后穿鞋子,即 $\boldsymbol{BA}$. "脱"是"穿"的逆映射,即 $(\boldsymbol{BA})^{-1}$; 脱的时候应当先脱鞋子后脱袜子,即 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$, 这就说明了 $(\boldsymbol{BA})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$.

问题 6 怎样理解矩阵的分块运算?

答 矩阵的分块不是一种新的运算,只是将大矩阵分割成许多子块,把子块当作矩阵的元来处理,有可能使得矩阵的结构更清晰,运算更简单.

矩阵的分块是理解有关概念和证明某些结论的重要手段.

将矩阵随意分块不会给计算带来方便. 只有选择合适的分块方法,使得一些子块成为便于计算的特殊矩阵,如零矩阵、单位矩阵、对角矩阵或三角矩阵等,才有可能简化计算.

分块矩阵的运算是矩阵运算的"并行处理",分块矩阵的运算规律与矩阵完全相同.

问题7 矩阵的三种初等变换是否独立?

答 否. 因为对调行变换可用三次倍加行变换和一次倍乘行变换来实现:$r_i \leftrightarrow r_j$ 等同于 $r_j + r_i, r_i - r_j, r_j + r_i, (-1)r_i$.

问题8 只用倍加行变换能否将任何方阵都化为三角矩阵?

答 能. 用倍加行变换可将 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 的 $(i,1)$ 元化为零,$i \geqslant 2$,分三种情况讨论:

(1) 若 $a_{11} \neq 0$,则做倍加变换 $r_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} r_1$ 可将 $(i,1)$ 元化为零,$i \geqslant 2$;

(2) 若 $a_{11}=0$,但某个 $a_{i1} \neq 0$,则做倍加变换 $r_1 + r_i$,使得 $(1,1)$ 元非零,即情况(1);

(3) 若第一列元全为零,则 $\boldsymbol{A}$ 已符合要求.

类似地,可将 $\boldsymbol{A}$ 的 $(i,2)$ 元化为零,$i \geqslant 3$. 如此继续下去,只用倍加行变换就可将 $\boldsymbol{A}$ 化为上三角矩阵.

同理,只用倍加行变换也可将 $\boldsymbol{A}$ 化为下三角行列式.

问题9 两个同阶的可逆矩阵是否等价?

答 因为同型矩阵等价的充要条件是它们的秩相等,而两个同阶的可逆矩阵是同型的且秩相等,所以它们等价.

但是,两个同阶的不可逆矩阵不一定等价,因为它们虽然同型但秩不一定相等.

问题10 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵,且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解,是否有 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$? 反之,若 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 是否同解?

答 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵,且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解,则 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \boldsymbol{B}$,从而 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$.

反过来就不一定成立,例如矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},$$

则 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \boldsymbol{B} = 1$,从而 $\boldsymbol{A} \cong \boldsymbol{B}$. 但是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的通解分别为

$$\begin{bmatrix}0\\k\end{bmatrix} 与 \begin{bmatrix}k\\0\end{bmatrix},\quad k \text{ 为任意数},$$

因此两个方程组不同解.

问题11 为什么要引入初等矩阵?

答 如果对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 做初等变换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$,那么 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价,但不一定相等. 为了得到矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 之间更为精确的等式关系,人们引入了初等矩阵. 例如,对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 做倍乘行变换 kr_i 得到矩阵 $\boldsymbol{B}$,则有等式 $\boldsymbol{P}(i(k))\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$;对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 做倍加列变换 $c_i + kc_j$ 得到矩阵 $\boldsymbol{B}$,则有等式 $\boldsymbol{AP}(j,i(k))=\boldsymbol{B}$. 这也表明借助初等矩阵可以用矩阵乘法来刻画初等变换.

问题12 如何求初等矩阵的逆矩阵?

答 利用初等变换与对应的初等矩阵关系定理,可以方便地求出初等矩阵的逆矩阵.

对调变换 $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换是 $r_i \leftrightarrow r_j$,它们对应的初等矩阵都是 $\boldsymbol{P}(i,j)$,因此,对单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 做两次对调变换 $r_i \leftrightarrow r_j$,$\boldsymbol{E}$ 不会发生变化,于是 $\boldsymbol{P}(i,j)\boldsymbol{P}(i,j)\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$,即知 $\boldsymbol{P}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{P}(i,j)$.

倍乘变换 kr_i 的逆变换是 $\frac{1}{k}r_i$,它们对应的初等矩阵分别是 $\boldsymbol{P}(i(k))$ 和 $\boldsymbol{P}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$,因此,对单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 依次做倍乘变换 kr_i 和 $\frac{1}{k}r_i$,$\boldsymbol{E}$ 不会发生变化,于是 $\boldsymbol{P}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)\boldsymbol{P}(i(k))\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$,即知 $\boldsymbol{P}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{P}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$.

倍加变换 r_i+kr_j 的逆变换是 r_i-kr_j，它们对应的初等矩阵都是 $\boldsymbol{P}(i,j(k))$ 和 $\boldsymbol{P}(i,j(-k))$，因此，对单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 做依次倍加变换 r_i+kr_j 和 r_i-kr_j，$\boldsymbol{E}$ 不会发生变化，于是 $\boldsymbol{P}(i,j(-k))\boldsymbol{P}(i,j(k))\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$，即知 $\boldsymbol{P}(i,j(k))^{-1}=\boldsymbol{P}(i,j(-k))$.

问题 13 矩阵方程与线性方程组有什么联系？

答 矩阵方程是线性方程组的推广，是有限个具有相同系数矩阵的线性方程组放在一起所形成的. 因此矩阵方程解的判别准则、求解方法以及应用均与线性方程组相类似.

问题 14 如何理解分块初等变换？

答 分块对调行变换是有限次对调行变换的复合；分块倍乘行变换、分块倍加行变换则是有限次倍乘行变换或倍加行变换的复合，因此，分块初等变换是初等变换的“并行处理”.

同样，分块对调矩阵是有限个对调矩阵的乘积，分块倍乘矩阵、分块倍加矩阵是有限个倍乘矩阵或倍加矩阵的乘积.

分块初等变换一般不是初等变换，分块初等矩阵一般不是初等矩阵.

问题 15 分块倍乘行变换和分块倍加行变换中，对左乘的矩阵各有什么要求？

答 用矩阵 $\boldsymbol{P}_1$ 左乘分块矩阵$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}$的第一行全部子块，要求 $\boldsymbol{P}_1$ 的阶数等于 $\boldsymbol{A}_{11}$ 的行数，且 $\boldsymbol{P}_1$ 是可逆矩阵. 前者是为了 $\boldsymbol{P}_1$ 能够左乘，后者是为了保证分块倍乘行变换可逆.

用矩阵 $\boldsymbol{P}_2$ 左乘分块矩阵$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}$的第一行全部子块加到第二行，要求 $\boldsymbol{P}_2$ 的行数等于 $\boldsymbol{A}_{21}$ 的行数、其列数等于 $\boldsymbol{A}_{11}$ 的行数，从而使分块倍加变换能够进行. 分块倍加变换显然是可逆的.

问题 16 如何理解矩阵秩的概念及其应用？

答 任何矩阵都可以经过有限次初等行变换化成阶梯矩阵或者最简阶梯矩阵，总可以经过有限次初等变换化为等价标准形，且等价标准形是唯一的，等价标准形中 1 的个数定义为矩阵的秩.

矩阵的秩是矩阵在初等变换中的一个不变量，即初等变换不改变矩阵的秩. 因此只需做初等行变换将矩阵化成阶梯矩阵，阶梯矩阵中非零行的数目就是其等价标准形中 1 的个数，即矩阵的秩.

矩阵的秩在线性代数中的作用非同一般，归纳如下：

(1) 判断两个矩阵是否等价；

(2) 判断一个矩阵是否可逆；

(3) 判断齐次线性方程组是否有非零解；

(4) 判断非齐次线性方程组是否有解；

(5) 判断矩阵方程是否有解.

范例精讲

题型 1　矩阵的运算规律及应用

例 1 下列结论中不正确的是 【 】

(A) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$；

(B) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $n\times1$ 矩阵,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$;

(C) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵,且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$;

(D) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵,且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,则 $\boldsymbol{A}^5\boldsymbol{B}^3=\boldsymbol{B}^3\boldsymbol{A}^5$.

解 (A) 因 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AE}-\boldsymbol{EA}-\boldsymbol{E}^2=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$,故结论正确.

(B) 因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $n\times1$ 矩阵,所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 均为一阶矩阵,从而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$,故结论正确.

(C) 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 一般推不出 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$,因此

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2\neq\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2,$$

故结论不正确.

(D) 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,有

$$\boldsymbol{AB}^3=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{B}^2=(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{B}^3\boldsymbol{A},$$
$$\boldsymbol{A}^5\boldsymbol{B}^3=\boldsymbol{A}^4(\boldsymbol{AB}^3)=\boldsymbol{A}^4(\boldsymbol{B}^3\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3(\boldsymbol{AB}^3)\boldsymbol{A}=\cdots=\boldsymbol{B}^3\boldsymbol{A}^5,$$

故结论正确.

因此应选(C).

注 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{BA}\neq\boldsymbol{0}$,例如 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$.

例 2 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&2&1\\0&-1&2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&0\\1&3&-2\\3&8&-4\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-4&-8\\2&4\\1&2\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BC},\boldsymbol{AC},\boldsymbol{CA}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}-1&2&1\\0&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0\\1&3&-2\\3&8&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&12&-8\\5&13&-6\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{BC}=\begin{bmatrix}1&2&0\\1&3&-2\\3&8&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&-8\\2&4\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{AC}=\begin{bmatrix}-1&2&1\\0&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&-8\\2&4\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&18\\0&0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{CA}=\begin{bmatrix}-4&-8\\2&4\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2&1\\0&-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&-20\\-2&0&10\\-1&0&5\end{bmatrix}.$$

注 矩阵的乘法不同于数的乘法,例如:

(1) $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$,这是因为 $\boldsymbol{AB}$ 有意义时,$\boldsymbol{BA}$ 未必也有意义;即使 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义,它们也未必同型;即使 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义且同型,也未必相等.

(2) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 不一定能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$;若 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$.

(3) $\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{CB}$ 不一定能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$;若 $\boldsymbol{C}$ 为可逆矩阵,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

(4) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$ 不一定能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{E}$.

(5) $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 可能成立.

例 3 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$,$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,证明 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$.

证 由题设知

$$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2,$$

从而

$$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0} \tag{1}$$

对(1)式分别用 $\boldsymbol{A}$ 左乘与右乘,并注意到 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,得

$$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{ABA}+\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}.$$

两式相减,有

$$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0} \tag{2}$$

由(1)式和(2)式得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}.$$

题型 2 矩阵幂的计算

例 4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^k$.

解 易知

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}=4\boldsymbol{E}=2^2\boldsymbol{E}.$$

当 $k=2m$ 时,$\boldsymbol{A}^k=(\boldsymbol{A}^2)^m=2^{2m}\boldsymbol{E}=2^k\boldsymbol{E}$;

当 $k=2m+1$ 时,$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}^{2m+1}=(\boldsymbol{A}^2)^m\boldsymbol{A}=2^{2m}\boldsymbol{A}=2^{k-1}\boldsymbol{A}$.

注 归纳法是求矩阵幂的一种基本方法.

例 5 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^k$.

解 记 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$,且

$$\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^k&=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^k=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})\cdots(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})\\&=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\beta}\\&=(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^{k-1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^{k-1}\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

注 (1) 当 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=1$ 时,都可以用这种方法求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的幂;

(2) 当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 时,$\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$,其中 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元之和.

例 6 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^k$.

解 令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$,则

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}^3=\boldsymbol{B}^4=\cdots=\boldsymbol{0},$$

从而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^k&=(\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E})^k=\sum_{i=0}^{k}\mathrm{C}_k^i\boldsymbol{B}^i(2\boldsymbol{E})^{k-i}\\&=\mathrm{C}_k^0\boldsymbol{B}^0(2\boldsymbol{E})^k+\mathrm{C}_k^1\boldsymbol{B}^1(2\boldsymbol{E})^{k-1}+\mathrm{C}_k^2\boldsymbol{B}^2(2\boldsymbol{E})^{k-2}\\&=2^k\boldsymbol{E}+k\cdot 2^{k-1}\boldsymbol{B}+\frac{k(k-1)}{2}\cdot 2^{k-2}\boldsymbol{B}^2\\&=\begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ -3k\cdot 2^{k-1} & 2^k & 0 \\ k(19-3k)\cdot 2^{k-3} & k\cdot 2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

注 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 拆成 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\lambda\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{B}^l=\boldsymbol{0}$($l$ 为某一个正整数),然后用二项式定理求矩阵幂 $\boldsymbol{A}^k$.

例 7 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & & & \\ & 3 & 1 & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & -1 \\ & & & -9 & 3 \end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^k$.

解 记 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & \\ & 3 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}$,再令 $\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}$,则

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{J}^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{J}^3=\boldsymbol{J}^4=\cdots=\boldsymbol{0},$$

从而

$$\boldsymbol{B}^k=(3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J})^k=3^k\boldsymbol{E}+\mathrm{C}_k^1\cdot 3^{k-1}\boldsymbol{J}+\mathrm{C}_k^2\cdot 3^{k-2}\boldsymbol{J}^2.$$

又

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}(3,-1),\quad \boldsymbol{C}^2=6\boldsymbol{C},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{C}^k=6^{k-1}\boldsymbol{C},$$

所以

$$\boldsymbol{A}^k=\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^k & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3^k & \mathrm{C}_k^1\cdot 3^{k-1} & \mathrm{C}_k^2\cdot 3^{k-2} & & \\ & 3^k & \mathrm{C}_k^1\cdot 3^{k-1} & & \\ & & 3^k & & \\ & & & 3\cdot 6^{k-1} & -6^{k-1} \\ & & & -9\cdot 6^{k-1} & 3\cdot 6^{k-1} \end{bmatrix}.$$

题型 3 可逆矩阵的判定与逆矩阵的计算

例 8 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&-1\\3&-2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

(1) 证明矩阵 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 可逆；

(2) 求 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}^2+5\boldsymbol{A}+6\boldsymbol{E})$；

(3) 求 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

解 (1) 因为

$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}4&1&-1\\3&0&0\\0&0&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&4\end{bmatrix},$$

则 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=3$，所以 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 可逆.

(2) 由于 $\boldsymbol{A}^2+5\boldsymbol{A}+6\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})$，因此

$$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}^2+5\boldsymbol{A}+6\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}5&1&-1\\3&1&0\\0&0&5\end{bmatrix}.$$

(3) 由矩阵运算的规律得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{A}[(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}-(\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}})]\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{A}[-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-3\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-3\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\\&=-3\begin{bmatrix}2&1&-1\\3&-2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&-6&-6\\-9&12&-9\\0&0&0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

例 9 设矩阵 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}-[(\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}]^{-1}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&10\end{bmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{D}$.

解 因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}&=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}-[(\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}]^{-1}\\&=\boldsymbol{A}^{-1}[(\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^{-1}[(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}]^{-1}\\&=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

而

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix},$$

所以

$$D=A^{-1}B^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&0\\4&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}.$$

例 10　设矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&10&6\\1&-3&-3\\-2&10&8\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$. 求：

(1) B^{-1}；

(2) $B^{-1}AB$；

(3) A^k.

解　(1) 利用初等行变换法求 B^{-1}，得

$$[B\quad E]=\begin{bmatrix}2&2&3&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1&0\\2&2&3&1&0&0\\-1&2&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1&0\\0&4&3&1&-2&0\\0&1&1&0&1&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&4&3&1&-2&0\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&0&2&1\\0&1&1&0&1&1\\0&0&-1&1&-6&-4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1&-4&-3\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{bmatrix},$$

因此

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}.$$

(2) $B^{-1}AB=\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&10&6\\1&-3&-3\\-2&10&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$

(3) 由 $B^{-1}AB=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，得 $A=B\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}B^{-1}$，从而

$$A^k=B\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}^kB^{-1}=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^k&0&0\\0&1&0\\0&0&2^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2^k+2&5\cdot 2^{k+1}-10&3\cdot 2^{k+1}-6\\2^k-1&-2^{k+2}+5&-3\cdot 2^k+3\\-2^{k+1}+2&5\cdot 2^{k+1}-10&7\cdot 2^k-6\end{bmatrix}.$$

注　本题给出了求矩阵幂的一种新方法：当 $B^{-1}AB=\Lambda$ 为对角矩阵时，$A^k=B\Lambda^kB^{-1}$. 第 5 章范例精讲中题型 7 会详细介绍这种方法.

例 11 已知 $n(n\geqslant 2)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解 因为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}(1,1,\cdots,1),$$

所以 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2=n(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$，即 $\boldsymbol{A}^2+(2-n)\boldsymbol{A}=(n-1)\boldsymbol{E}$，从而

$$\frac{1}{n-1}[\boldsymbol{A}+(2-n)\boldsymbol{E}]\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},$$

则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{n-1}[\boldsymbol{A}+(2-n)\boldsymbol{E}]=\frac{1}{n-1}\begin{bmatrix}2-n&1&1&\cdots&1\\1&2-n&1&\cdots&1\\1&1&2-n&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&2-n\end{bmatrix}.$$

注 本题的方法比较巧妙，只对特殊矩阵有效.

例 12 设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$，且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{A}$.

解 因为

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})]^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}},$$

即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{A}=[(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}]^{-1}$. 又

$$(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{bmatrix},$$

$$[(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{E}]=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\2&1&0&0&0&1&0&0\\3&2&1&0&0&0&1&0\\4&3&2&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-2&1&0&0\\0&2&1&0&-3&0&1&0\\0&3&2&1&-4&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-2&1&0&0\\0&0&1&0&1&-2&1&0\\0&0&2&1&2&-3&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&-2&1&0&0\\0&0&1&0&1&-2&1&0\\0&0&0&1&0&1&-2&1\end{bmatrix},$$

从而

$$A=[(C-B)^T]^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}.$$

注 若可逆矩阵 A 是数值的,则一般通过对矩阵 $[A\quad E]$ 做初等行变换求 A^{-1};若可逆矩阵 A 是抽象的,则首先想到按定义 $AB=E$ 或 $BA=E$ 求 A^{-1}.

例 13 设 A 为 n 阶矩阵,且 $A^2=2E$,$B=A^2-2A+E$,证明 B 可逆,并求 B^{-1}.

证 方法 1 由 $A^2=2E$,可得 $(A-E)(A+E)=E$,故 $A-E$ 可逆,且

$$(A-E)^{-1}=A+E.$$

从而由 $B=A^2-2A+E=(A-E)^2$,知 B 可逆,且

$$B^{-1}=[(A-E)^2]^{-1}=[(A-E)^{-1}]^2=(A+E)^2=A^2+2A+E=2A+3E.$$

方法 2 由 $A^2=2E$,知 $(3E-2A)(3E+2A)=E$,且

$$B=A^2-2A+E=3E-2A,$$

所以 $B^{-1}=(3E-2A)^{-1}=2A+3E$.

例 14 设 A_1 为 m 阶可逆矩阵,A_4 为 n 阶可逆矩阵,A_2 为 $m\times n$ 矩阵,A_3 为 $n\times m$ 矩阵,求矩阵 $A=\begin{bmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

解 采用待定系数法.设有矩阵 $X=\begin{bmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{bmatrix}$,使得

$$AX=\begin{bmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_m&0\\0&E_n\end{bmatrix},$$

根据分块矩阵的乘法,得矩阵方程组

$$\begin{cases}A_1X_1+A_2X_3=E_m,\\A_3X_1+A_4X_3=0,\\A_1X_2+A_2X_4=0,\\A_3X_2+A_4X_4=E_n,\end{cases}$$

因 A_4 可逆,故由第二个矩阵方程得 $X_3=-A_4^{-1}A_3X_1$,代入第一个矩阵方程,得

$$(A_1-A_2A_4^{-1}A_3)X_1=E_m,$$

从而 $A_1-A_2A_4^{-1}A_3$ 和 X_1 均可逆,且

$$X_1=(A_1-A_2A_4^{-1}A_3)^{-1},$$

于是

$$X_3=-A_4^{-1}A_3(A_1-A_2A_4^{-1}A_3)^{-1}.$$

同理,由第三、第四个矩阵方程可得

$$X_4=(A_4-A_3A_1^{-1}A_2)^{-1},$$

$$X_2=-A_1^{-1}A_2(A_4-A_3A_1^{-1}A_2)^{-1},$$

所以矩阵 A 可逆,且

$$A^{-1}=X=\begin{bmatrix}(A_1-A_2A_4^{-1}A_3)^{-1}&-A_1^{-1}A_2(A_4-A_3A_1^{-1}A_2)^{-1}\\-A_4^{-1}A_3(A_1-A_2A_4^{-1}A_3)^{-1}&(A_4-A_3A_1^{-1}A_2)^{-1}\end{bmatrix}.$$

注 (1) 在例 14 中分别取 $\boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{0}$,得到分块三角矩阵的逆矩阵

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_4\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_4^{-1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_4^{-1}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{A}_4^{-1}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{A}_4^{-1}\end{bmatrix}.$$

(2) 求分块矩阵的逆矩阵,待定系数法不失为一个好的方法.

题型 4 矩阵秩的计算与应用

例 15 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -2 & a & -16\\ 2 & -3 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -3\\ 3 & b & 1 & -2\end{bmatrix}$的秩的最大值和最小值,其中 a,b 是参数.

解 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换,得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -2 & a & -16\\ 2 & -3 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -3\\ 3 & b & 1 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -3\\ 0 & -1 & -2 & 7\\ 0 & b+3 & -2 & 7\\ 0 & 1 & a-3 & -7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -3\\ 0 & -1 & -2 & 7\\ 0 & b+4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a-5 & 0\end{bmatrix}.$$

$a=5$ 且 $b=-4$ 时,rank $\boldsymbol{A}$ 的最小值为 2;$a\neq5$ 且 $b\neq-4$ 时,rank $\boldsymbol{A}$ 的最大值为 4.

注 求矩阵秩的一般方法是对矩阵做初等行变换化为阶梯矩阵,由阶梯矩阵的非零行数来确定矩阵的秩.

例 16 讨论 $n(n\geqslant2)$阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b & \cdots & b\\ b & a & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & \cdots & a\end{bmatrix}$的秩.

解 对 $\boldsymbol{A}$ 先做初等行变换 $r_i-r_1(i=2,3,\cdots,n)$,再做初等列变换 $c_1+c_2+\cdots+c_n$,得上三角矩阵

$$\begin{bmatrix}a+(n-1)b & b & \cdots & b\\ & a-b & \cdots & 0\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & a-b\end{bmatrix}.$$

由于初等变换不改变矩阵的秩,因此

(1) 当 $a\neq b$ 且 $a\neq-(n-1)b$ 时,rank $\boldsymbol{A}=n$;

(2) 当 $a=b=0$ 时,rank $\boldsymbol{A}=0$;

(3) 当 $a=b\neq0$ 时,rank $\boldsymbol{A}=1$;

(4) 当 $a=-(n-1)b\neq0$ 时,rank $\boldsymbol{A}=n-1$.

注 在求矩阵秩的过程中初等行变换和初等列变换可以同时使用.

例 17 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1\\ 3\\ 2\end{bmatrix}(1,-1,0)$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & a & 2\\ -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$,且 rank$(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B})=2$,求 a.

解 易知 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}$,且

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\3&-3&0\\2&-2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\3&-2&0\\2&-2&1\end{bmatrix}.$$

用初等行变换将 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 化为阶梯矩阵:

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\3&-2&0\\2&-2&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

故 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=3$,即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为可逆矩阵,从而 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=\operatorname{rank}((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{B})=2$.

用初等行变换将矩阵 $\boldsymbol{B}$ 化为阶梯矩阵,得

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&a&2\\-1&2&3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&4&2\\0&0&6-\dfrac{a}{2}\end{bmatrix},$$

因此当 $6-\dfrac{a}{2}=0$,即 $a=12$ 时,$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B})=2$.

题型 5 线性方程组的矩阵解法

例 18 求解齐次线性方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3-x_4=0,\\2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0,\\x_1+x_2+2x_3-x_4=0.\end{cases}$

解 对方程组的系数矩阵做初等变换,得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1&-1\\2&2&1&2\\1&1&2&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&-\dfrac{4}{3}\\0&1&0&3\\0&0&1&-\dfrac{4}{3}\end{bmatrix},$$

原方程组等价于

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{4}{3}x_4,\\x_2=-3x_4,\\x_3=\dfrac{4}{3}x_4.\end{cases}$$

令 $x_4=3k$(k 为任意数),得方程组的通解

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}4\\-9\\4\\3\end{bmatrix}.$$

注 消元法解齐次线性方程组的一般步骤如下：

(a) 消元和回代 对方程组的系数矩阵做初等行变换，使其化为最简阶梯矩阵.

(b) 求解 把最简阶梯矩阵还原为同解线性方程组，写出通解.

例 19 求解下列非齐次线性方程组：

(1) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 11x_1 + 3x_2 = 8. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 4, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -2. \end{cases}$

解 (1) 对增广矩阵做初等变换化为阶梯矩阵：

$$[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 10 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 11 & 3 & 0 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & -8 \\ 0 & -10 & 11 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix},$$

因此 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 2 < 3 = \operatorname{rank}[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{b}]$，所以此方程组无解.

(2) 对增广陈做初等行变换化为最简阶梯矩阵：

$$[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 5 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{5} & 1 \end{bmatrix},$$

从而原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 \qquad -\frac{2}{5}x_4 = 1, \\ \quad x_2 \qquad\quad = 0, \\ \qquad x_3 - \frac{9}{5}x_4 = 1. \end{cases}$$

令 $x_4 = 5k$，得方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k \text{ 为任意数.}$$

注 消元法解非齐次线性方程组的具体步骤如下：

(a) 消元和有解判断 对方程组的增广矩阵做初等行变换化为阶梯矩阵，如果阶梯矩阵的最后一个非零行中只有末尾那个元不为零，则方程组无解，否则方程组有解.

(b) 回代 若方程组有解，则将阶梯矩阵经过初等行变换化成最简阶梯矩阵.

(c) 求解 把最简阶梯矩阵还原为同解线性方程组，写出通解.

例 20 设 $\boldsymbol{\alpha} = (1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta} = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\gamma} = (0,0,8)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，$b = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，解方程

$$2b^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x} + b^4\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\gamma}.$$

解 因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}, b=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=2$，所以

$$2b^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=2b^2(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}=2^4(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x},$$
$$\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^3\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=2^3(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x},$$

于是原方程可化为

$$2^4(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}=2^3(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}+2^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma},$$

即

$$2^3(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma}.$$

又

$$\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\left(1,\frac{1}{2},0\right)=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&1&0\\1&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix},$$

从而原方程可化为

$$\begin{bmatrix}-8&4&0\\16&-8&0\\8&4&-16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\8\end{bmatrix},$$

对该方程组的增广矩阵进行初等行变换，得

$$\begin{bmatrix}-8&4&0&0\\16&-8&0&0\\8&4&-16&8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-2&1&0&0\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&\frac{1}{2}\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

因此，方程组等价于

$$\begin{cases}x_1=x_3+\dfrac{1}{2},\\x_2=2x_3+1,\\x_3=x_3,\end{cases}$$

故所求方程组的通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix},\quad k\text{ 为任意常数}.$$

注 对于矩阵运算与方程组求解相结合的题型，一般是先化简矩阵形式，后代值求解线性方程组.

题型 6 含参线性方程组的解的讨论

例 21 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\d\\d^2\end{bmatrix}$，若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充要条件是 【 】

(A) $a\notin\Omega, d\notin\Omega$;　　(B) $a\notin\Omega, d\in\Omega$;

(C) $a\in\Omega,d\notin\Omega$；　　　　(D) $a\in\Omega,d\in\Omega$.

解　因为

$$[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-1)(a-2)&(d-1)(d-2)\end{bmatrix},$$

由已知条件知 $\text{rank}\boldsymbol{A}=\text{rank}[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]<3$，故 $a=1$ 或 $a=2$，且 $d=1$ 或 $d=2$. 所以选(D).

例 22　设有线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0,\\2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1,\\3x_1+2x_2+ax_3+7x_4=-1,\\x_1-x_2-6x_3-x_4=b.\end{cases}$$

(1) 当 a,b 取何值时，方程组无解？

(2) 当 a,b 取何值时，方程组有无穷多解？并求方程组的通解.

解　对增广矩阵做初等行变换化为阶梯矩阵：

$$\begin{bmatrix}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&a&7&-1\\1&-1&-6&-1&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&3&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a+8&0&0\\0&0&0&0&b+2\end{bmatrix}.$$

当 $b\neq-2$ 时，方程组无解.

当 $b=-2,a=-8$ 时，方程组有无穷多解，此时原方程组等价于

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0,\\x_2+2x_3+2x_4=1,\end{cases}$$

回代得

$$\begin{cases}x_1=4x_3-x_4-1,\\x_2=-2x_3-2x_4+1.\end{cases}$$

令 $x_3=k,x_4=l$，得方程组的通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}4\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+l\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad k,l\text{ 为任意数.}$$

当 $b=-2,a\neq-8$ 时，方程组有无穷多解，此时原方程组等价于

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0,\\x_2+2x_3+2x_4=1,\\(a+8)x_3=0,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}x_1=-x_4-1,\\x_2=-2x_4+1,\\x_3=0.\end{cases}$$

令 $x_4=k$，得方程组的通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad k\text{ 为任意数.}$$

例 23 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}a\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$，已知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解．求：

(1) λ,a；

(2) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解．

解 (1) 已知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解，则 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]<3$．对 $[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]$ 进行初等行变换：

$$[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1 & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1\end{bmatrix}.$$

当 $\lambda\neq\pm1$ 时，$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]=3$，不合题意．

当 $\lambda=1$ 时，$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}<\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]$，不合题意．

当 $\lambda=-1$ 时，有

$$[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a+2\end{bmatrix},$$

由 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]<3$，得 $a=-2$，因此 $\lambda=-1$，$a=-2$．

(2) 由于

$$[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

因此 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=k\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix},\quad k\text{ 为任意数}.$$

注 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解，则必存在无穷多个解，从几何上说，两个平面相交于两点，则必相交于两点确定的直线．

题型 7 矩阵方程的求解

例 24 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$，解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{X}-\boldsymbol{E}$．

解 由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{X}-\boldsymbol{E}$，有 $\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$，即

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}).$$

容易求得 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=3$，所以 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆，且

$$X=(A-E)^{-1}(A-E)(A+E)=A+E=\begin{bmatrix}3&3&4\\0&5&5\\0&0&7\end{bmatrix}.$$

例 25 已知 A,B 为三阶矩阵，且满足 $2A^{-1}B=B-4E$.

(1) 证明 $A-2E$ 可逆，并求$(A-2E)^{-1}$；

(2) 若 $B=\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，求矩阵 A.

解 (1) 因 $2A^{-1}B=B-4E$，故 $B-2A^{-1}B=4E$，即$(A-2E)A^{-1}B=4E$，所以 $A-2E$ 可逆，且

$$(A-2E)^{-1}=\frac{1}{4}A^{-1}B.$$

(2) 由于 $2A^{-1}B=B-4E$，因此 $A(B-4E)=2B$. 使用初等列变换，得

$$\begin{bmatrix}B-4E\\2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\\2&-4&0\\2&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix},$$

于是

$$A=2B(B-4E)^{-1}=\begin{bmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}.$$

例 26 已知 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，且

$$AXA+BXB=AXB+BXA+A(A-B),$$

求矩阵 X.

解 将题中的矩阵方程变形为

$$(A-B)X(A-B)=A(A-B).$$

容易算得 $\operatorname{rank}(A-B)=3$，故 $A-B$ 可逆，所以$(A-B)X=A$.

使用初等行变换，得

$$[A-B\quad A]=\begin{bmatrix}1&-1&-1&1&0&0\\0&1&-1&1&1&0\\0&0&1&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&4&3&2\\0&1&0&2&2&1\\0&0&1&1&1&1\end{bmatrix},$$

故

$$X=(A-B)^{-1}A=\begin{bmatrix}4&3&2\\2&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

注 (1) 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆时,解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的方法是:对增广矩阵 $[\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{B}]$ 做一系列初等行变换,把 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{E}$ 时,$\boldsymbol{B}$ 就变成了矩阵方程的解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

(2) 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆时,解矩阵方程 $\boldsymbol{YA}=\boldsymbol{B}$ 的方法是:对矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$ 做一系列初等列变换,把 $\boldsymbol{A}$ 变成 $\boldsymbol{E}$ 时,$\boldsymbol{B}$ 就变成了矩阵方程的解 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BA}^{-1}$.

例 27 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\1&6&1\end{bmatrix}$,解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{X}$.

解 将题中的矩阵方程变形为

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}.$$

因为 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2$,即 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 不可逆,所以不能采用上述方法求解.

为此令 $\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{x}_1\quad \boldsymbol{x}_2\quad \boldsymbol{x}_3]$,$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=[\boldsymbol{b}_1\quad \boldsymbol{b}_2\quad \boldsymbol{b}_3]$,得到三个方程组

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{b}_i,\quad i=1,2,3,$$

用初等行变换法求解三个方程组:

$$[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}]=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&3&0\\1&6&0&2&18&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&2&0&0\\0&1&0&0&3&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\a\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}0\\3\\b\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\c\end{bmatrix},\quad a,b,c\text{ 为任意数},$$

于是

$$\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{x}_1\quad \boldsymbol{x}_2\quad \boldsymbol{x}_3]=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\a&b&c\end{bmatrix},\quad a,b,c\text{ 为任意数}.$$

注 解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的步骤如下:

(a) 对增广矩阵 $[\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{B}]$ 做初等行变换化为阶梯矩阵 $[\boldsymbol{A}_1\quad \boldsymbol{B}_1]$,若 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}_1=\mathrm{rank}[\boldsymbol{A}_1\quad \boldsymbol{B}_1]$,则矩阵方程有解,否则矩阵方程无解.

(b) 当矩阵方程有解时,对阶梯矩阵 $[\boldsymbol{A}_1\quad \boldsymbol{B}_1]$ 做初等行变换化成最简阶梯矩阵 $[\boldsymbol{A}_2\quad \boldsymbol{B}_2]$.

(c) 设 $\boldsymbol{B}_2=[\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{\beta}_s]$,求出线性方程组 $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{\beta}_j$ 的通解($j=1,2,\cdots,s$),从而得到原矩阵方程的通解.

例 28 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&a\\1&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1\\1&b\end{bmatrix}$,问 a,b 为何值时,存在矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$?并求所有的矩阵 $\boldsymbol{C}$.

解 令 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}$,则

$$\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\begin{bmatrix}-x_2+ax_3&-ax_1+x_2+ax_4\\x_1-x_3-x_4&x_2-ax_3\end{bmatrix},$$

由 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$ 得四元线性方程组

$$\begin{cases} -x_2+ax_3 = 0, \\ -ax_1+x_2+ax_4=1, \\ x_1-x_3-x_4=1, \\ x_2-ax_3=b, \end{cases}$$

对其系数矩阵做初等行变换,得

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

当 $a=-1,b=0$ 时,上述四元线性方程组有解,即存在 $\boldsymbol{C}$,使 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$,且该方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1+c_2+1 \\ -c_1 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

即所求矩阵为

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_1+c_2+1 & -c_1 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}, \quad c_1,c_2 \text{ 为任意数}.$$

例 29 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{bmatrix}$,问 a 为何值时,矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解,有唯一解或无穷多解?在有解时,求解此方程.

解 对矩阵方程的增广矩阵做初等行变换,得

$$[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & a & -a-1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & a-1 & -a+1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) 当 $a\neq-2$ 且 $a\neq1$ 时,矩阵方程有唯一解,且

$$[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B}] \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & a+2 & 0 & 0 & a-4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{3a}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a-4}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

因此,矩阵方程的唯一解为 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{3a}{a+2} \\ 0 & \frac{a-4}{a+2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(2) 当 $a=-2$ 时

$$[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B}] \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix},$$

则 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=2$，$\mathrm{rank}[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}]=3$，矩阵方程无解.

(3) 当 $a=1$ 时

$$[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}]\to\begin{bmatrix}1&-1&-1&2&2\\0&3&3&-3&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&1&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

则矩阵方程的通解为

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}3&3\\-k_1-1&-k_2-1\\k_1&k_2\end{bmatrix},\quad k_1,k_2\text{ 为任意数.}$$

题型8 初等矩阵与初等变换的应用

例30 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列加到第 i 列得到矩阵 $\boldsymbol{B}$.

(1) 证明 $\boldsymbol{B}$ 可逆；

(2) 分析 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的关系；

(3) 求 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$.

解 (1) 由题设知，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AP}(j,i(1))$. 因 $\boldsymbol{A}$ 与初等矩阵 $\boldsymbol{P}(j,i(1))$ 均可逆，故 $\boldsymbol{B}$ 可逆.

(2) 由(1)知 $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{P}(j,i(1))^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}(j,i(-1))\boldsymbol{A}^{-1}$，即将 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 i 行的(-1)倍加到第 j 行得到矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

(3) $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}(j,i(-1))\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}(j,i(-1))$.

例31 计算 $\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{99}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{100}$.

解 由初等矩阵的性质知

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{99}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{100}$$

$$=\begin{bmatrix}1&2&3\\4+1\times99&5+2\times99&6+3\times99\\7&8&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\103&203&303\\7&8&9\end{bmatrix}.$$

注 记例31中间的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，左乘矩阵$[P(2,1(1))]^{99}$表示将 $\boldsymbol{A}$ 的第一行加到第二行99次；右乘矩阵$[P(1,3)]^{100}$表示将 $\boldsymbol{A}$ 的第一列与第三列交换100次.

例32 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\4&1&3\\-6&-2&-4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

(1) 问是否存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$？若不存在说明理由，若存在，求 $\boldsymbol{P}$；

(2) 求满足 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$ 的所有三阶矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解 (1) 因为可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可以分解成若干个初等矩阵的乘积，$\boldsymbol{P}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$ 相当于对 $\boldsymbol{A}$ 做有限次初等行变换，所以是否存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$ 的问题等价于 $\boldsymbol{A}$ 能否经过有限次初等行变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$.

为了求得可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，只需对矩阵$[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{E}]$做初等行变换，将 $\boldsymbol{A}$ 化为 $\boldsymbol{B}$ 的同时，$\boldsymbol{E}$ 就化成

了 $\boldsymbol{P}$，即

$$[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{E}]=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0\\4&1&3&0&1&0\\-6&-2&-4&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-4&1&0\\0&0&0&-2&2&1\end{bmatrix}=[\boldsymbol{B}\quad\boldsymbol{P}],$$

从而

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\-2&2&1\end{bmatrix}.$$

（2）将矩阵方程 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$ 变形为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，再对增广矩阵做初等行变换，得

$$[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}]=\begin{bmatrix}1&4&-6&1&0&0\\0&1&-2&0&1&0\\1&3&-4&1&-1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&1&-4&0\\0&1&-2&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

解得

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}-2a+1\\2a\\a\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}-2b-4\\2b+1\\b\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}-2c\\2c\\c\end{bmatrix},\quad a,b,c\text{ 为任意数},$$

于是 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{x}_1\quad\boldsymbol{x}_2\quad\boldsymbol{x}_3]$，故

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}-2a+1&2a&a\\-2b-4&2b+1&b\\-2c&2c&c\end{bmatrix},\quad a,b,c\text{ 为任意数}.$$

注 （1）如果 $\boldsymbol{B}$ 比较复杂，则对 $[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{E}]$ 做初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为 $\boldsymbol{B}$ 会很困难.

（2）本题给出了解矩阵方程 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$ 的另一个方法.

例 33 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{bmatrix}$ 可经过初等列变换化为 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$. 求：

（1）常数 a 的值；

（2）满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

解 （1）由于

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&a\\0&1&-a\\0&3&-3a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&a\\0&1&-a\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&a+1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&0&2-a\end{bmatrix},$$

因此，由 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=2$ 得 $a=2$.

（2）题意是解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，为此对增广矩阵做初等行变换，得

$$[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}]=\begin{bmatrix}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{b}_1 \quad \boldsymbol{b}_2 \quad \boldsymbol{b}_3]$,则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{b}_1$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}-6\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6k_1+3\\2k_1-1\\k_1\end{bmatrix};$$

方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{b}_2$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{bmatrix}=k_2\begin{bmatrix}-6\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6k_2+4\\2k_2-1\\k_2\end{bmatrix};$$

方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{b}_3$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}x_{13}\\x_{23}\\x_{33}\end{bmatrix}=k_3\begin{bmatrix}-6\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6k_3+4\\2k_3-1\\k_3\end{bmatrix}.$$

从而矩阵方程 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的通解为

$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \boldsymbol{x}_3]=\begin{bmatrix}-6k_1+3 & -6k_2+4 & -6k_3+4\\2k_1-1 & 2k_2-1 & 2k_3-1\\k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix},\quad k_1,k_2,k_3\text{ 为任意数}.$$

对矩阵 $\boldsymbol{P}$ 做初等行变换,得

$$\boldsymbol{P}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & k_3-k_2\end{bmatrix},$$

由 $\boldsymbol{P}$ 可逆,即知 $k_2\neq k_3$. 于是,满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-6k_1+3 & -6k_2+4 & -6k_3+4\\2k_1-1 & 2k_2-1 & 2k_3-1\\k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix},\quad k_1,k_2,k_3\text{ 为任意数,且 }k_2\neq k_3.$$

同步练习

1. 填空题

(1) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$,则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=$________.

(2) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$,则 $\boldsymbol{B}^{2012}-2\boldsymbol{A}^2=$________.

(3) 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均可逆,则 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}^{-1}=$________.

(4) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 3\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{B}^{-1}=$________.

(5) 设五阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的秩分别为 3 和 5,则 $\boldsymbol{BAB}$ 的秩是________.

(6) 已知$\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(0,1,0,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$,则 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=$________.

(7) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{bmatrix}$,且 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=3$,则 $k=$________.

(8) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,则 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^3=$________.

(9) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&1&2\\0&2&4\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}$ 为三阶满秩矩阵,则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=$________.

(10) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&\lambda&-1&2\\2&-1&\lambda&5\\1&10&-6&1\end{bmatrix}$,当 $\lambda=$________时,$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$ 最小.

2. 单选题

(1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵,以下结论正确的是 【 】

(A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$; (B) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}$;

(C) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+7\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{A}+7\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}$; (D) $\boldsymbol{AB}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{BA}$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&-1&2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{P}(1,2)$是对调单位矩阵的第一列与第二列所得的二阶初等矩阵,则 $\boldsymbol{P}(1,2)\boldsymbol{A}$ 等于 【 】

(A) $\begin{bmatrix}2&1&3\\-1&3&2\end{bmatrix}$; (B) $\begin{bmatrix}1&3&2\\3&2&-1\end{bmatrix}$;

(C) $\begin{bmatrix}2&4&6\\3&-1&2\end{bmatrix}$; (D) $\begin{bmatrix}3&-1&2\\1&2&3\end{bmatrix}$.

(3) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵,则必有 【 】

(A) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$;

(B) 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 时,$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$;

(C) 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时,对任意正整数 k,m,$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^m=\boldsymbol{B}^m\boldsymbol{A}^k$;

(D) 当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆时,$[(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}]^{-1}=(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

(4) 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵,且满足 $\boldsymbol{ABAC}=\boldsymbol{E}$,则必有 【 】

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$; (B) $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{C}^2=\boldsymbol{E}$;

(C) $\boldsymbol{BA}^2\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$; (D) $\boldsymbol{CA}^2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$.

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为 n 阶矩阵,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{C}^2$ 为 【 】

(A) $\boldsymbol{0}$; (B) $\boldsymbol{E}$; (C) $2\boldsymbol{E}$; (D) $3\boldsymbol{E}$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵,若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{0}$,则 【 】

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆; (B) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆;

(C) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆; (D) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵,对调 $\boldsymbol{A}$ 的第一列与第二列得 $\boldsymbol{B}$,再把 $\boldsymbol{B}$ 的第二列加到第三列得 $\boldsymbol{C}$,则满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为 【 】

(A) $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$; (B) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$;

(C) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$; (D) $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$.

(8) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶可逆方阵,下列结论正确的是 【 】

(A) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$;

(B) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$;

(C) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$;

(D) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

(9) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵,下列结论正确的是 【 】

(A) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也可逆;

(B) 若 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 都可逆,则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆;

(C) 若 $\boldsymbol{AB}$ 不可逆,则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都不可逆;

(D) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 中至少有一个不可逆,则 $\boldsymbol{AB}$ 不可逆.

(10) 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第二列加到第一列得到 $\boldsymbol{B}$,再对调 $\boldsymbol{B}$ 的第二行与第三行得到单位矩阵,记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$,则 【 】

(A) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$; (B) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$; (C) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$; (D) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$,求 $\boldsymbol{BC}$.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\3&2\end{bmatrix}$,求与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵.

5. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,证明 $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}$ 可逆.

6. 设四阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2&2\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^4$.

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{A}^n$.

8. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{B}$.

9. 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵,且满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$.

(1) 证明 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆,并用 $\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{B}$ 表示 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$;

(2) 若 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

10. 问 a,b 为何值时,矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{bmatrix}$$

的秩为 2.

11. 讨论并求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a,\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b,\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0,\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2.\end{cases}$$

12. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1&2\\0&1&3&1\\1&a&c&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$,且 $\boldsymbol{\eta}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解,试求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

单元测验

一、填空题(每小题 3 分,共 18 分)

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{bmatrix}$,则 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=$________;

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵,则 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\2\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}^{-1}=$________;

3. 设 $\boldsymbol{A}=(1,2)$,$\boldsymbol{B}=(2,1)$,$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{C}^{99}=$________;

4. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^{12}\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}^{10}=$________;

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×3 矩阵,且 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{bmatrix}$,则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=$________;

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$,则 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=$________.

二、单选题(每小题 3 分,共 18 分)

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是 n 阶矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则下列结论中必成立的是 【 】

(A) 若 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$; (B) 若 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$;

(C) 若 $BA=CA$，则 $B=C$；　　(D) 若 $A^{-1}B=CA^{-1}$，则 $B=C$.

2. 若矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&4\\2&\lambda&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，为使 A 的秩达到最小值，则 λ 的取值为 【 】

(A) 2；　(B) -1；　(C) $\frac{1}{2}$；　(D) $\frac{9}{4}$.

3. 设 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}-a_{21}&a_{32}-a_{22}&a_{33}-a_{23}\end{bmatrix}$，$P_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$. 若 $P_2P_1A=B$，则 【 】

(A) $P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$；　(B) $P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$；

(C) $P_2=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$；　(D) $P_2=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

4. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&\lambda&-1\\1&2&1\end{bmatrix}$，$B$ 为三阶矩阵，$\operatorname{rank} B=2$，$\operatorname{rank}(AB)=1$，则 λ 的取值为 【 】

(A) 1；　(B) -1；　(C) 3；　(D) -3.

5. 齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\2x_1-x_2-ax_3=0,\\x_1-2x_2+3x_3=0\end{cases}$ 有非零解当且仅当 a 的值为 【 】

(A) 1；　(B) -2；　(C) 3；　(D) -4.

6. 设 A,B 为 n 阶对称矩阵，下列矩阵中不一定为对称矩阵的是 【 】

(A) $A+2B$；　(B) $AB-BA$；

(C) $AB+BA$；　(D) ABA.

三、(10分)　设 $A=\begin{bmatrix}1&\lambda&-1&2\\2&-1&\lambda&5\\1&10&-6&1\end{bmatrix}$，对 λ 的不同取值，讨论 $\operatorname{rank} A$.

四、(10分)　设 $A=\begin{bmatrix}0&0&0&2&-3\\0&0&0&-5&7\\2&0&0&0&0\\1&-3&5&0&0\\0&1&-2&0&0\end{bmatrix}$，求 A^{-1}.

五、(10分)　已知 $A=\begin{bmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$，求 A^k.

六、(10 分) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E}$ 为可逆阵,证明 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1},(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}$ 均可逆.

七、(12 分) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&0\\2&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$,且有 $\boldsymbol{ABA}=-2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$,求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

八、(12 分) 当 k 取何值时,方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+kx_3=4,\\(k+1)x_2+(k+1)x_3=k^2+4,\\2x_1+(k+2)x_3=0\end{cases}$ 有唯一解、无解、有无穷多组解?并在有无穷多组解时,求通解表达式.

习题选解

(A)

5. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$,求一个不是数量矩阵的矩阵 $\boldsymbol{B}$,使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

解 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,知 $\boldsymbol{B}$ 为二阶矩阵.设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}$,则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}+2b_{21}&b_{12}+2b_{22}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}&2b_{11}+b_{12}\\b_{21}&2b_{21}+b_{22}\end{bmatrix},$$

从而

$$\begin{cases}b_{11}+2b_{21}=b_{11},\\b_{12}+2b_{22}=2b_{11}+b_{12},\\b_{22}=2b_{21}+b_{22},\end{cases}\quad \text{解得}\quad \begin{cases}b_{21}=0,\\b_{22}=b_{11}.\end{cases}$$

因 $\boldsymbol{B}$ 不是数量矩阵,故有

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}k&l\\0&k\end{bmatrix},\quad k\text{ 为任意数},l\text{ 为任意非零数}.$$

9. 计算下列矩阵的幂.

(1) $\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}^n$; (2) $\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}^n$;

(3) $\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}^n$; (4) $\begin{bmatrix}a&1&0&0\\0&a&1&0\\0&0&a&1\\0&0&0&a\end{bmatrix}^n$.

解 (1) 容易算得

$$\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}\cos2\theta&-\sin2\theta\\\sin2\theta&\cos2\theta\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}\cos3\theta & -\sin3\theta\\ \sin3\theta & \cos3\theta\end{bmatrix},$$

由此猜想

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}.$$

下面用数学归纳法证明.当 $n=1$ 时,结论成立.设当 $n=k-1$ 时,结论成立,即

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^{k-1}=\begin{bmatrix}\cos(k-1)\theta & -\sin(k-1)\theta\\ \sin(k-1)\theta & \cos(k-1)\theta\end{bmatrix}.$$

当 $n=k$ 时,有

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^k&=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^{k-1}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\cos(k-1)\theta & -\sin(k-1)\theta\\ \sin(k-1)\theta & \cos(k-1)\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\cos(k\theta) & -\sin(k\theta)\\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

综上,对于任意正整数 n,有

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}.$$

(2) 因为

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}^4=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}^5=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},$$

所以,当 $n=4k$(k 为正整数)时,有

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}^{4k}=\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^4\right)^k=\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)^k=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix};$$

当 $n=4k+1$(k 为正整数)时,有

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}^{4k+1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}^{4k}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix};$$

当 $n=4k+2$(k 为正整数)时,有

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}^{4k+2}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}^{4k}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix};$$

当 $n=4k+3$(k 为正整数)时,有

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}^{4k+3}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}^{4k}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

(3) 分拆法.由于当 $k\geqslant3$ 时,有

$$\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\mathbf{0},$$

因此利用二项式定理有

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}^n=\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}\right)^n$$

$$=\mathrm{C}_n^0\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^n+\mathrm{C}_n^1\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}+\mathrm{C}_n^2\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}^2$$

$$=\begin{bmatrix}1&2n&2n^2+n\\0&1&2n\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

(4) 分拆法. 易知

$$\begin{bmatrix}a&1&0&0\\0&a&1&0\\0&0&a&1\\0&0&0&a\end{bmatrix}^1=\begin{bmatrix}a&1&0&0\\0&a&1&0\\0&0&a&1\\0&0&0&a\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}a&1&0&0\\0&a&1&0\\0&0&a&1\\0&0&0&a\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}a^2&2a&1&0\\0&a^2&2a&1\\0&0&a^2&2a\\0&0&0&a^2\end{bmatrix}.$$

当 $n\geqslant 3$ 时,利用二项式定理有

$$\begin{bmatrix}a&1&0&0\\0&a&1&0\\0&0&a&1\\0&0&0&a\end{bmatrix}^n=\left(\begin{bmatrix}a&0&0&0\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\right)^n$$

$$=\mathrm{C}_n^0\begin{bmatrix}a&0&0&0\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{bmatrix}^n+\mathrm{C}_n^1\begin{bmatrix}a&0&0&0\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}+$$

$$\mathrm{C}_n^2\begin{bmatrix}a&0&0&0\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{bmatrix}^{n-2}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}^2+$$

$$\mathrm{C}_n^3\begin{bmatrix}a&0&0&0\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{bmatrix}^{n-3}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}^3$$

$$=\begin{bmatrix}a^n&na^{n-1}&\mathrm{C}_n^2a^{n-2}&\mathrm{C}_n^3a^{n-3}\\0&a^n&na^{n-1}&\mathrm{C}_n^2a^{n-2}\\0&0&a^n&na^{n-1}\\0&0&0&a^n\end{bmatrix}.$$

11. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}17&-6\\35&-12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7&3\\5&-2\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^{10}$.

解 注意到

$$\begin{bmatrix}-7 & 3\\ 5 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

因此有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{10}&=\begin{bmatrix}17 & -6\\ 35 & -12\end{bmatrix}^{10}=\left(\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & 3\\ 5 & -2\end{bmatrix}\right)^{10}\\ &=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}^{10}\begin{bmatrix}-7 & 3\\ 5 & -2\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}5\times 3^{11}-7\times 2^{11} & 3\times 2^{11}-2\times 3^{11}\\ 35\times 3^{10}-35\times 2^{10} & 15\times 2^{10}-14\times 3^{10}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

12. 已知$\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$,设$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$,求$\boldsymbol{A}^m$.

解 由$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=3$,有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^m&=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^m=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\cdots(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\ &=3^{m-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=3^{m-1}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\\ &=3^{m-1}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^{m-1} & \frac{1}{2}\times 3^{m-1} & 3^{m-2}\\ 2\times 3^{m-1} & 3^{m-1} & 2\times 3^{m-2}\\ 3^m & \frac{1}{2}\times 3^m & 3^{m-1}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

16. 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4\end{bmatrix},$$

利用分块矩阵的乘法,计算$\boldsymbol{AB}$.

解 将$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$按如下方式分块:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & -2\boldsymbol{E}_2\end{bmatrix},\quad 其中\ \boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_2\end{bmatrix},\quad 其中\ \boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix},$$

所以

$$AB=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & -2E_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1B_1 & 0\\ 0 & -B_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0\\ 1 & 6 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6\\ 0 & 0 & 0 & -4 & -8\end{bmatrix}.$$

17. 利用分块矩阵求下列矩阵的逆：

$$A=\begin{bmatrix}5 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

解 可将矩阵 A,B 按如下方式分块：

$$A=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix},\quad A_2=[-4];$$

$$B=\begin{bmatrix}B_1 & 0\\ 0 & B_2\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}6 & 7\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

于是

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1} & 0\\ 0 & A_2^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}\end{bmatrix},$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}B_1^{-1} & 0\\ 0 & B_2^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 7\\ 0 & 0 & 1 & -6\end{bmatrix}.$$

20. 将矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ 表示成初等矩阵的乘积.

解 对矩阵 A 做初等行变换：

$$A\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-4r_2]{r_1+2r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow{(-1)r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

即有

$$P(3(-1))P(2,3(1))P(1,3(1))P(3,2(-4))P(1,2(2))P(2,3)A=E,$$

从而

$$\begin{aligned}A&=P(2,3)^{-1}P(1,2(2))^{-1}P(3,2(-4))^{-1}P(1,3(1))^{-1}P(2,3(1))^{-1}P(3(-1))^{-1}\\ &=P(2,3)P(1,2(-2))P(3,2(4))P(1,3(-1))P(2,3(-1))P(3(-1)).\end{aligned}$$

注 以上过程是对 $\boldsymbol{A}$ 只做初等行变换所得. 同样地,只做初等列变换或做行、列初等变换均可将 $\boldsymbol{A}$ 表示成初等矩阵的乘积. 因此本题的结果不唯一.

26. 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-1&2&3\\2&3&4&5\\1&3&-1&2\\3&2&4&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&-1&0&1&4\\1&-2&1&4&-3\\5&-4&1&6&5\\-7&8&-3&-14&1\end{bmatrix},$$

(1) 将 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 化为阶梯矩阵和最简阶梯矩阵;

(2) 求 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$;

(3) 求齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解;

(4) 若 $\boldsymbol{B}$ 是某个非齐次线性方程组的增广矩阵,求该方程组的所有解.

解 (1) 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-1&2&3\\2&3&4&5\\1&3&-1&2\\3&2&4&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-1&2\\0&1&-2&-3\\0&0&-7&-26\\0&0&0&-8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

上式第二个矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 是阶梯矩阵,第三个矩阵是最简阶梯矩阵.

对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 做初等行变换:

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&-1&0&1&4\\1&-2&1&4&-3\\5&-4&1&6&5\\-7&8&-3&-14&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&1&4&-3\\0&3&-2&-7&10\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xlongequal{\text{def}}\boldsymbol{B}_1$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{11}{3}\\0&1&-\frac{2}{3}&-\frac{7}{3}&\frac{10}{3}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xlongequal{\text{def}}\boldsymbol{B}_2,$$

$\boldsymbol{B}_1$ 是阶梯矩阵,$\boldsymbol{B}_2$ 是最简阶梯矩阵.

(2) 由(1)知 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}_1=4$,而初等变换不改变矩阵的秩,因此 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=4$.

(3) 因齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵满秩,故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

(4) 由(1)知增广矩阵与系数矩阵的秩相等,从而该非齐次方程组有解. 因为 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}_2=2<4$,所以该非齐次方程组有无穷多解. 再由(1)中的 $\boldsymbol{B}_2$ 写出其同解方程组:

$$\begin{cases}x_1-\dfrac{1}{3}x_3-\dfrac{2}{3}x_4=\dfrac{11}{3},\\ x_2-\dfrac{2}{3}x_3-\dfrac{7}{3}x_4=\dfrac{10}{3},\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{3}x_3+\dfrac{2}{3}x_4+\dfrac{11}{3},\\ x_2=\dfrac{2}{3}x_3+\dfrac{7}{3}x_4+\dfrac{10}{3},\end{cases}$$

得方程组的通解

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + l\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad k,l \text{ 为任意数.}$$

27．求解矩阵方程：

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 6 & -4 \\ -5 & 3 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 19 & 10 \end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.

解　(1) 显然 $\boldsymbol{X}$ 为二阶矩阵，设

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}.$$

因为

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & -2 & 6 & -4 \\ -1 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & -1 & 9 & -5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

所以矩阵方程有解，且对应的两个同解方程组为

$$\begin{cases} x_{11} = 2, \\ x_{21} = -3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{12} = -1, \\ x_{22} = 2, \end{cases}$$

从而

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(2) 显然 $\boldsymbol{X}$ 为 3×2 矩阵，设

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix}.$$

因为

$$\left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 9 & 19 & 10 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 5 & 9 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

所以矩阵方程有解，且对应的两个同解方程组为

$$\begin{cases} x_{11} = -5x_{31} + 9, \\ x_{21} = 3x_{31} - 4, \\ x_{31} = x_{31}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{12} = -5x_{32} + 4, \\ x_{22} = 3x_{32} - 1, \\ x_{32} = x_{32}, \end{cases}$$

分别令 $x_{31} = k, x_{32} = l$，得矩阵方程的通解

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = l\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + l\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -4 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k,l \text{ 为任意数.}$$

(3) 此题适宜用待定系数法.显然 $\boldsymbol{X}$ 为二阶矩阵,设 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$,则有

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} 2x_1+x_3 & 2x_2+x_4 \\ 3x_1+2x_3 & 3x_2+2x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & -2x_1+x_2 \\ x_3 & -2x_3+x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix},$$

从而

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = x_1 + 1, \\ 2x_2 + x_4 = -2x_1 + x_2 + 2, \\ 3x_1 + 2x_3 = x_3 - 3, \\ 3x_2 + 2x_4 = -2x_3 + x_4 + 4, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_3 = -3, \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \end{cases}$$

解得 $x_1=-2, x_2=-4, x_3=3, x_4=10$,故

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

(B)

28. 设有两个非零列矩阵 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$.

(1) 计算 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$;

(2) 求 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})$;

(3) 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$,证明 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$.

解 (1)

$$\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

(2) 因 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 皆为非零列矩阵,故 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 的某一行非零,且其他各行是该行的倍数,从而 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})=1$.

(3) 由于

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}) = (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})$$

$$= E - \alpha\beta^T - \beta\alpha^T + \beta\alpha^T\alpha\beta^T,$$

且$\alpha^T\alpha$是一个数,因此$A^TA=E-\alpha\beta^T-\beta\alpha^T+\beta\beta^T$的充要条件是$\beta\alpha^T\alpha\beta^T-\beta\beta^T=0$,这相当于$\beta(\alpha^T\alpha-1)\beta^T=0$,这又等价于$(\alpha^T\alpha-1)\beta\beta^T=0$. 由$\beta\neq 0$可知$\beta\beta^T\neq 0$,所以$A^TA=E-\alpha\beta^T-\beta\alpha^T+\beta\beta^T$当且仅当$\alpha^T\alpha-1=0$,即$\alpha^T\alpha=1$.

29. 设有正整数k,使得矩阵A满足$A^k=0$,证明$E-A$可逆,并求$(E-A)^{-1}$.

解 由$A^k=0$知

$$E = E^k - A^k = (E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}),$$

故有$E-A$可逆,且

$$(E-A)^{-1} = E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$

30. 设矩阵A满足$A^2+A-8E=0$.

(1) 证明$A-2E$可逆;

(2) 解矩阵方程$AX+2(A+3E)^{-1}A=2X+2E$.

解 (1) 因$A^2+A-8E=0$,故$(A-2E)(A+3E)=2E$,即

$$(A-2E)\left(\frac{A+3E}{2}\right) = E,$$

于是$A-2E$可逆.

(2) 由(1)知

$$(A-2E)^{-1} = \frac{A+3E}{2}, \quad (A+3E)^{-1} = \frac{A-2E}{2},$$

从而由题设得

$$AX + (A-2E)A = 2X + 2E,$$

即

$$(A-2E)(X+A) = 2E,$$

故

$$\frac{X+A}{2} = (A-2E)^{-1} = \frac{A+3E}{2},$$

从而$X=3E$.

31. 设A,B为n阶矩阵,$AB+BA=E$,证明$A^3B+BA^3=A^2$.

证 由题设有

$$\begin{aligned} A^3B &= A^2(AB) = A^2(E-BA) = A(E-AB)A \\ &= A(BA)A = (AB)A^2 = (E-BA)A^2 = A^2 - BA^3, \end{aligned}$$

所以$A^3B+BA^3=A^2$.

32. 设A与B是同阶方阵,且$A,B,A+B$均可逆,证明$A^{-1}+B^{-1}$可逆.

证 将$A^{-1}+B^{-1}$恒等变形,得到$A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1}$.

因$A,B,A+B$均可逆,故$A^{-1}(A+B)B^{-1}$可逆,即$A^{-1}+B^{-1}$可逆,从而

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = B(A+B)^{-1}A.$$

33. (1) 设A,B为可逆矩阵,证明$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$;

(2) 求下列矩阵的逆矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & -5 & 7\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

解 (1) 方法 1(待定系数法) 略.

方法 2(利用分块矩阵初等变换) 设 $\boldsymbol{A}$ 的阶数为 m，$\boldsymbol{B}$ 的阶数为 n. 将分块矩阵的第一列与第二列互换，即

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_n\\ \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix},$$

从而

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_n\\ \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_n\\ \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}.$$

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 按如下方式分块：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{0}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=[a_n];$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{0}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -5 & 7\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 5\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以 $a_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$，从而 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_2$ 均可逆，此时有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2^{-1}\\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & a_n^{-1}\\ a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a_2^{-1} & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}^{-1} & 0\end{bmatrix}.$$

同理

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{B}_2^{-1}\\ \boldsymbol{B}_1^{-1} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & -3\\ -7 & -3 & 0 & 0 & 0\\ -5 & -2 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

34. 设逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{B}^{-1}$ 为已知，求分块矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

解 设 $\boldsymbol{A}$ 的阶数为 m，$\boldsymbol{B}$ 的阶数为 n. 将分块矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的第一行左乘 $-\boldsymbol{CA}^{-1}$ 加到第二

行，即

$$\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ -CA^{-1} & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix},$$

再根据本章习题选解中第33(1)题的结果，得

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ -CA^{-1} & E_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ -CA^{-1} & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

35. 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，且

$$AXA + BXB = AXB + BXA + A(A-B),$$

求 X.

解 由 $AXA+BXB=AXB+BXA+A(A-B)$，有

$$AX(A-B) - BX(A-B) = A(A-B),$$

即

$$(A-B)X(A-B) = A(A-B).$$

又因为

$$(A-B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

所以

$$X = (A-B)^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

36. 设 $(2E-C^{-1}B)A^{\mathrm{T}}=C^{-1}$，且

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

求 A.

解 由 $(2E-C^{-1}B)A^{\mathrm{T}}=C^{-1}$ 得 $(2C-B)A^{\mathrm{T}}=E$，即 $A^{\mathrm{T}}=(2C-B)^{-1}$.

不难求得

$$A^{\mathrm{T}} = (2C-B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

从而

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}.$$

37. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{bmatrix}$, $B=(E+A)^{-1}(E-A)$,求 $(E+B)^{-1}$.

解 由 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$,得

$$E+B=(E+A)^{-1}(E+A)+(E+A)^{-1}(E-A),$$

即

$$E+B=2(E+A)^{-1},$$

因此

$$(E+B)^{-1}=\frac{1}{2}(E+A)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&0&-3&4\end{bmatrix}.$$

38. 设 a,b,c,d 是四个实数,证明 $\begin{cases}a^2+b^2=1,\\c^2+d^2=1,\\ac+bd=0\end{cases}$ 成立的充要条件是 $\begin{cases}a^2+c^2=1,\\b^2+d^2=1,\\ab+cd=0\end{cases}$ 成立.

证 记矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$,则 $\begin{cases}a^2+b^2=1,\\c^2+d^2=1,\\ac+bd=0\end{cases}$ 成立等价于 $AA^{\mathrm{T}}=E$,这相当于 $A^{\mathrm{T}}A=E$,又等价于 $\begin{cases}a^2+c^2=1,\\b^2+d^2=1,\\ab+cd=0\end{cases}$ 成立.

39. 某公司对职工实行分批轮训.现有在岗职工900人,轮训职工100人.计划每年从在岗职工抽调20%进行轮训,同时又有70%轮训职工结业回到生产岗位.若职工总数保持不变,两年后在岗职工和轮训职工各有多少?

解 设 n 年后在岗职工和轮训职工人数分别为 x_n 和 y_n,记为向量 $\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}$,而目前在岗职工和轮训职工人数可用向量表示为 $\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}900\\100\end{bmatrix}$.依题意可得关系式

$$\begin{cases}x_{n+1}=0.8x_n+0.7y_n,\\y_{n+1}=0.2x_n+0.3y_n,\end{cases}$$

写为矩阵形式,即

$$\begin{bmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8&0.7\\0.2&0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix},$$

从而有

$$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8&0.7\\0.2&0.3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8&0.7\\0.2&0.3\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.78&0.77\\0.22&0.23\end{bmatrix}\begin{bmatrix}900\\100\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}779\\221\end{bmatrix}.$$

所以两年后在岗职工和轮训职工各有 779 人和 221 人.

40. 某城市有 15 万具有本科以上学历的人,其中有 2 万人是教师,据调查,平均每年有 10%的人从教师职业转为其他职业,又有 1%的人从其他职业转为教师职业. 试预测 5 年以后这 15 万人中有多少人在从事教师职业.

解 设 n 年后这 15 万人中从事教师职业人数为 x_n,余者人数为 y_n,记为 $\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}$. 依题意可得 $\begin{bmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}$ 的关系式

$$\begin{cases}x_{n+1}=0.9x_n+0.01y_n,\\y_{n+1}=0.1x_n+0.99y_n,\end{cases}$$

写为矩阵形式,即

$$\begin{bmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9&0.01\\0.1&0.99\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix},$$

记为

$$\begin{bmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{bmatrix}=\mathbf{A}\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}.$$

故有

$$\begin{bmatrix}x_5\\y_5\end{bmatrix}=\mathbf{A}^5\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9&0.01\\0.1&0.99\end{bmatrix}^5\begin{bmatrix}2\\13\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1.719\\13.281\end{bmatrix}.$$

所以可预测 5 年后这 15 万人中约有 17190 人从事教师职业.

第 3 章

行　列　式

基本要求

1. 理解行列式的概念.

2. 理解行列式的按行(列)展开法则和初等变换性质.

3. 理解可逆矩阵的充要条件,熟悉求逆矩阵的伴随矩阵法.

4. 了解行列式的乘积法则和分块三角行列式的公式,会用 Cramer 法则讨论齐次线性方程组的解.

5. 掌握降阶法、三角化方法、升阶法,熟悉归纳法、递推法,会用分拆法.

6. 理解矩阵秩的子式定义,会用子式求矩阵秩,了解矩阵秩的性质及其证明.

内容综述

一、行列式的概念

n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$(或 $\det \boldsymbol{A}$)是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 的一种运算,规定它是按下述运算法则得到的一个算式:

当 $n=1$ 时,$|\boldsymbol{A}|=|a_{11}|=a_{11}$;

当 $n\geqslant 2$ 时,

$$|\boldsymbol{A}| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n},$$

其中对一切 $j=1,2,\cdots,n$,有

$$A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j},$$

这里 M_{1j} 是 $\boldsymbol{A}$ 中删去元 a_{1j} 所在的第一行和第 j 列后余下的元按原来相对位置组成的 $n-1$ 阶行列式,称 M_{1j} 为 a_{1j} 的余子式,称 A_{1j} 为 a_{1j} 的代数余子式. $|\boldsymbol{A}|$ 也称为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式.

矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的完全展开式为

$$|\boldsymbol{A}| = \sum(\pm a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}),$$

它是 $n!$ 项的代数和,每一项都是不同行不同列的 n 个元的乘积.

二、行列式的性质

1. 行列式按行(列)展开法则

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = |\boldsymbol{A}|\delta_{ij},$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = |\boldsymbol{A}|\delta_{ij},$$

其中 Kronecker 符号

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

2. 行列式初等变换的性质

对调变换使得行列式的值反号.

倍乘变换只是放大或缩小行列式的值.

倍加变换不改变行列式的值.

3. 另外一些重要性质

若行列式的某两行(或列)成比例,则其值为零.

若行列式的某一行(或列)的元都是两数之和,则行列式等于两个行列式的和,例如

$$|\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_i+\boldsymbol{\beta}_i \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n| = |\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_i \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n| + |\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_i \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n|.$$

行列式与它的转置行列式相等,即转置运算不改变行列式的值.

三、伴随矩阵与矩阵的逆

当 $n \geqslant 2$ 时,n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 为 n 阶矩阵,它的(i,j)元为 A_{ji},这里 A_{ji} 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中(j,i)元的代数余子式$(i,j=1,2,\cdots,n)$.

注 只有阶数大于 1 的方阵才有伴随矩阵;伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$的(i,j)元是代数余子式 A_{ji},而不是 A_{ij}.

当$|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 时,称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵,否则称 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵.

如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,且 $n \geqslant 2$,那么

(1) $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$;

(2) 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时,有

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*, \quad \boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}, \quad (\boldsymbol{A}^*)^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A};$$

(3) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$,$(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$;

(4) $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}^* = \begin{cases} n, & \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n, \\ 1, & \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n-1, \\ 0, & \operatorname{rank} \boldsymbol{A} < n-1; \end{cases}$

(5) $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵的充要条件是$|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

四、行列式的计算

1. 典型方法:降阶法、三角化方法、归纳法、递推法、分拆法、升阶法.

2. 行列式的乘积法则：对任何 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，均有 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

注 对任何 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，均有 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，k 为任意数，则 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，则 $|\boldsymbol{A}^k|=|\boldsymbol{A}|^k$.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$.

6. 分块对角矩阵和分块三角矩阵的行列式：

$$|\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s)|=|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_s|;$$

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|,\quad \begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

7. 设 $n\geqslant 2$，n 阶 Vandermonde 行列式 V_n 的 (i,j) 元为 $x_j^{i-1}(i,j=1,2,\cdots,n)$，且

$$V_n=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

五、Cramer 法则

1. 如果 $n\times n$ 线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则方程组有唯一的解

$$x_1=\frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|},\quad x_2=\frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{|\boldsymbol{A}_n|}{|\boldsymbol{A}|},$$

其中 $|\boldsymbol{A}_j|(j=1,2,\cdots,n)$ 是用常数项向量 $\boldsymbol{b}$ 替代 $\boldsymbol{A}$ 中的第 j 列得到的行列式.

2. $n\times n$ 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件是系数行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$.

六、行列式与矩阵的秩

1. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数.

2. 矩阵秩的性质：

(1) $0\leqslant \operatorname{rank}\boldsymbol{A}_{m\times n}\leqslant\min\{m,n\}$.

(2) $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$.

(3) $\operatorname{rank}(k\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}(k\neq 0)$.

(4) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$，$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$.

(5) $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$ 当且仅当 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$.

(6) 若 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 是可逆矩阵，则

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{PA})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{AQ})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{PAQ})=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}.$$

(7) $\max\{\operatorname{rank}\boldsymbol{A},\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\}\leqslant\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}]\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$.

(8) $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}-\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$.

(9) Sylvester 不等式：设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times s$ 矩阵，则

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}-n\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{\operatorname{rank}\boldsymbol{A},\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\};$$

特别地，当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 时，有 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\leqslant n$.

疑难辨析

问题1 二阶、三阶行列式的对角线法则是否适用于四阶及四阶以上的行列式？

答 否. 由行列式的完全展开式可知，四阶行列式是24项的代数和，而按照对角线法则

只能写出 8 项,因此对角线法则不适用于四阶及四阶以上的行列式.

问题 2　行列式与矩阵有什么不同?

答　行列式与矩阵是两个完全不同的概念,行列式是一个算式,一个行列式经过计算可求得其数值;而矩阵仅仅是一个数表,它的行数和列数可以不同.行列式是方阵的函数,是矩阵的一种运算.一阶行列式与一阶矩阵都可以看做是一个数.

不同的方阵可以有相同的行列式值,例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

行列式的加法与数乘完全不同于矩阵的加法与数乘,例如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix},$$

$$k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix},$$

但是一般地

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix},$$

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix}.$$

行列式的乘法与方阵乘法却有着惊人的一致:当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵时,有

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{AB}|.$$

问题 3　如何确定行列式的完全展开式中每一项的符号?

答　矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$的行列式$|\boldsymbol{A}|$的完全展开式

$$|\boldsymbol{A}| = \sum(\pm a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}),$$

它是 $n!$ 项的代数和,每一项都是不同行不同列的 n 个元的乘积.

完全展开式中每一项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的符号为$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$,其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是自然数 1,2,…,n 的一个排列,这样的排列共有 $n!$ 个;$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$是排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数:大的数 j_s 排在小的数 j_t 前面(即 $j_s>j_t$ 但 $s<t$)的数对(j_s,j_t)的个数.例如,在排列 4 2 3 1 5 中,4 的前面有 0 个比它大的数,2 的前面有 1 个比它大的数,3 的前面有 1 个比它大的数,1 的前面有 3 个比它大的数,5 的前面有 0 个比它大的数,所以逆序数

$$\tau(42315) = 0+1+1+3+0 = 5.$$

至此,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式又可定义为

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

问题 4　矩阵的初等变换与行列式的初等变换有何异同?

答　行列式的三种初等行变换和三种初等列变换与矩阵的初等行变换和初等列变换具有相同的定义.

任何矩阵都可以经过有限次初等行变换化成阶梯矩阵，且一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 总能定义一个 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$，因此任何 n 阶行列式都可以经过有限次初等行变换化成三角行列式，从而计算出行列式的值.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换可化成 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{B}$，即矩阵的初等变换使得两个矩阵为等价关系.

行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 经过初等变换后其值变化如下：对调 $|\boldsymbol{A}|$ 的两行（或列）得到 $|\boldsymbol{B}|$，则 $|\boldsymbol{B}|=-|\boldsymbol{A}|$；用非零数 k 乘 $|\boldsymbol{A}|$ 的某一行（或列）得到 $|\boldsymbol{B}|$，则 $|\boldsymbol{B}|=k|\boldsymbol{A}|$；若将 $|\boldsymbol{A}|$ 的某一行（或列）的 k 倍加到另一行（或列）得到 $\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|$. 这说明行列式的初等变换使得两个行列式为比例关系.

问题 5 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，是否必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*$？

答 众所周知，若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^*$，则有 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$. 这里要求考查它的逆命题.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^*$，即答案是肯定的.

若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，则答案是否定的，例如取

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix},$$

显然 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，而

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix},$$

故 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{A}^*$.

问题 6 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 均为 n 阶矩阵，那么是否有

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}|?$$

答 当 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$ 时，上式成立.

当 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都不是零矩阵时，上式不一定成立. 例如，取

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix},$$

显然 $|\boldsymbol{A}|=2,|\boldsymbol{B}|=12,|\boldsymbol{C}|=30,|\boldsymbol{D}|=56$，从而

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}|=-248;$$

但是

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=64\neq|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}|.$$

注 虽然分块矩阵与普通矩阵在线性运算、乘法、初等变换等方面极为类似，但是分块矩阵的行列式与普通矩阵的行列式却不相同.

问题 7 如何理解 Cramer 法则及其应用？

答 Cramer 法则的意义在于它用方程组的系数显性地表达出 $n\times n$ 线性方程组解中每个未知量的取值，形式简洁，便于记忆.

应用 Cramer 法则求解线性方程组有两个前提：一是方程个数必须等于未知量个数，二是系数行列式不为零.

另外，应用 Cramer 法则求解 $n\times n$ 线性方程组，需要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式，其计算量远大于消元法，因此 Cramer 法则主要用于理论推导.

问题 8 如何应用行列式按行(列)展开法则？

答 行列式按行(列)展开法则可以将一个 n 阶行列式的计算归结为 n 个 $n-1$ 阶行列式的计算，这一般不会降低计算量. 但是当行列式中某行或某列含较多的零时，应用按行(列)展开法则将会使计算量大为降低. 因此，在应用按行(列)展开法则时，一般选择含零较多的行或列展开，或者先利用初等变换将某行或某列化为只含一个非零元后再展开.

问题 9 倍乘变换只是放大或缩小行列式的值，分块倍乘变换也只是放大或缩小行列式的值吗？

答 对. 例如，用可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 左乘分块矩阵

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}$$

的第二行全部子块，等价于

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix},$$

上式两边取行列式，得到

$$|\boldsymbol{P}|\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_{22}\end{vmatrix},$$

即，分块倍乘行变换只是放大或缩小行列式的值.

问题 10 倍加变换不改变行列式的值，分块倍加变换也不改变行列式的值吗？

答 对. 例如，用矩阵 $\boldsymbol{P}$ 右乘分块矩阵

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}$$

的第一列全部子块后加到第二列，等价于

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{P}\end{bmatrix},$$

上式两边取行列式，得到

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{P}\end{vmatrix},$$

即，分块倍加列变换不改变行列式的值.

问题 11 如何理解和应用非零子式求矩阵的秩？

答 定理"矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数"包含两层意思：$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\geqslant r$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有一个 r 阶子式不为零；$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\leqslant r$ 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $r+1$ 阶子式全为零. 在计算矩阵秩的时候，常常将这两个结论分开使用，即从高阶到低阶或者从低阶到高阶逐个考虑矩阵的子式. 但是，当矩阵的行数和列数较大时，用这种方法求秩是非常麻烦的.

范例精讲

题型 1 行列式的概念和性质

例 1 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & c+d & 1 \\ b & c & a+d & 1 \\ c & d & a+b & 1 \\ d & a & b+c & 1 \end{vmatrix}$.

解 将行列式的第一、二列加到第三列,得

$$D \xlongequal{c_3+c_2+c_1} \begin{vmatrix} a & b & a+b+c+d & 1 \\ b & c & a+b+c+d & 1 \\ c & d & a+b+c+d & 1 \\ d & a & a+b+c+d & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} a & b & 1 & 1 \\ b & c & 1 & 1 \\ c & d & 1 & 1 \\ d & a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

注 若行列式的各列前 k 个元之和相等,则可做初等行变换 $r_1+r_2+\cdots+r_k$,使得新的行列式中第一行的元相等;再提取第一行的公因子,使新的行列式第一行元全为 1,从而为后面的计算带来方便.若行列式的各行前 k 个元之和相等,也可如法炮制.

例 2 解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 12 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0.$

证 由行列式的性质和 Vandermonde 行列式,得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 12 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 12 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}$$

$$= 2(x-1)(x-2)(x-3),$$

即知题中方程的 3 个根为 1,2,3.

例 3 设 a,b,c 是方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根,计算行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

解 因为 a,b,c 是方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根,所以

$$x^3+px+q=(x-a)(x-b)(x-c),$$

比较上式两端 x^2 的系数,即得 $a+b+c=0$.从而

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2+r_3} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = 0.$$

例 4 设 M_{ij}，A_{ij} 分别为矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 7 & -8 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ 中元 a_{ij} 的余子式和代数余子式 $(i,j=1,2,3,4)$，计算：

(1) $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$；

(2) $2A_{31}-3A_{32}+A_{33}+5A_{34}$；

(3) $M_{14}+M_{24}+M_{34}+M_{44}$.

解 (1) 显然有

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 7 & -8 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

(2) 由于 $2A_{31}-3A_{32}+A_{33}+5A_{34}$ 表示行列式 $|\mathbf{A}|$ 中第一行各元与第三行对应元的代数余子式乘积之和，因此

$$2A_{31}-3A_{32}+A_{33}+5A_{34}=0.$$

(3) 因为 $M_{14}+M_{24}+M_{34}+M_{44}=-A_{14}+A_{24}-A_{34}+A_{44}$，所以

$$M_{14}+M_{24}+M_{34}+M_{44}=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}=-74.$$

注 此类题型无需直接计算指定的 M_{ij} 或 A_{ij}，而应联想行列式的按行(列)展开法则.

题型 2 数值行列式的计算与证明

例 5 计算 $D_5=\begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-x & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-x & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-x & x \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix}$.

解 将行列式按第一行展开，得

$$D_5=(1-x)D_4-x\begin{vmatrix} -1 & x & & \\ 0 & 1-x & x & \\ & -1 & 1-x & x \\ & & -1 & 1-x \end{vmatrix}=(1-x)D_4+xD_3,$$

由于 $D_2=1-x+x^2,D_1=1-x$,因此

$$D_5+xD_4=D_4+xD_3=D_3+xD_2=D_2+xD_1=1,$$

从而由递推关系得

$$\begin{aligned}D_5&=-xD_4+1=-x(-xD_3+1)+1=x^2(-xD_2+1)-x+1\\&=-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1.\end{aligned}$$

例 6　计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\2&1&2&\cdots&n-2&n-1\\3&2&1&\cdots&n-3&n-2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&n-2&n-3&\cdots&1&2\\n&n-1&n-2&\cdots&2&1\end{vmatrix}$.

解　将 D_n 的第 i 行乘以(-1)加到第 $i+1$ 行$(i=n-1,n-2,\cdots,2,1)$；再在新的行列式中,将第 n 列分别加到前面各列,得

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&-1&-1&\cdots&-1&-1\\1&1&-1&\cdots&-1&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&-1&-1\\1&1&1&\cdots&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}n+1&n+2&n+3&\cdots&2n-1&n\\0&-2&-2&\cdots&-2&-1\\0&0&-2&\cdots&-2&-1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-2&-1\\0&0&0&\cdots&0&-1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}2^{n-2}(n+1).$$

例 7　计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}2a&1&&&&\\a^2&2a&1&&&\\&a^2&2a&\ddots&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&\ddots&1\\&&&&a^2&2a\end{vmatrix}$.

解　方法 1　将行列式 D_n 按第一行拆成两个行列式之和,得

$$D_n=\begin{vmatrix}a&0&&&&\\a^2&2a&1&&&\\&a^2&2a&\ddots&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&\ddots&1\\&&&&a^2&2a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a&1&&&&\\a^2&2a&1&&&\\&a^2&2a&\ddots&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&\ddots&1\\&&&&a^2&2a\end{vmatrix}$$

$$=aD_{n-1}+\begin{vmatrix}a&1&&&&\\a^2&2a&1&&&\\&a^2&2a&\ddots&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&\ddots&1\\&&&&a^2&2a\end{vmatrix}.$$

将最后一个行列式的第一行的$(-a)$倍加到第二行,再将第二行的$(-a)$倍加到第三行,…,将第$n-1$行的$(-a)$倍加到第n行,得

$$\begin{vmatrix} a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & a & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & a \end{vmatrix} = a^n,$$

于是得到递推关系式 $D_n = aD_{n-1} + a^n$,因此

$$\begin{aligned} D_n &= a(aD_{n-2} + a^{n-1}) + a^n = a^2 D_{n-2} + 2a^n = \cdots \\ &= a^{n-1} D_1 + (n-1)a^n = (n+1)a^n. \end{aligned}$$

注 从行列式的左上角元或右下角元出发,寻找突破口,这是行列式计算的常用思路.

方法2 将行列式 D_n 的第一行的$\left(-\frac{1}{2}a\right)$倍加到第二行,再将第二行的$\left(-\frac{2}{3}a\right)$倍加到第三行……将第$n-1$行的$\left(-\frac{n-1}{n}a\right)$倍加到第$n$行,得

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} = \cdots$$

$$= \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & & & \\ & 0 & \frac{4a}{3} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 0 & \frac{(n+1)a}{n} \end{vmatrix} = 2a \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{4a}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{(n+1)a}{n} = (n+1)a^n.$$

注 本例中的行列式称为三对角行列式.方法1和方法2是计算三对角行列式的常用方法.

例8 计算n阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$.

解 注意到 D_n 很像 Vandermonde 行列式,为此构造 $n+1$ 阶 Vandermonde 行列式

$$f_{n+1}(x)=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n&x\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&\cdots&a_n^2&x^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_1^{n-2}&a_2^{n-2}&a_3^{n-2}&\cdots&a_n^{n-2}&x^{n-2}\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&a_3^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}&x^{n-1}\\a_1^n&a_2^n&a_3^n&\cdots&a_n^n&x^n\end{vmatrix},$$

则

$$f_{n+1}(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)\cdot\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i),$$

且 D_n 是行列式 $f_{n+1}(x)$ 中元 x^{n-1} 的余子式.

由上式知 x^{n-1} 的系数为 $-\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)$. 将 $f_{n+1}(x)$ 按第 $n+1$ 列展开,得

$$f_{n+1}(x)=A_{1,n+1}+xA_{2,n+1}+\cdots+x^{n-1}A_{n,n+1}+x^nA_{n+1,n+1},$$

其中 $A_{n,n+1}=(-1)^{n+(n+1)}M_{n,n+1}=-D_n$,从而

$$D_n=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i).$$

注 本题提供了计算行列式 D_n 的一种新思路:构造 $n+1$ 阶行列式,使得 D_n 成为 $n+1$ 阶行列式的一个余子式,其前提是 $n+1$ 阶行列式的计算非常简便,并且从 $n+1$ 阶行列式的表达式中能方便地得到 D_n. 这种方法与升阶法有异曲同工之处.

例 9 证明 $n(n\geqslant 3)$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}\cos(\alpha_1-\beta_1)&\cos(\alpha_1-\beta_2)&\cdots&\cos(\alpha_1-\beta_n)\\\cos(\alpha_2-\beta_1)&\cos(\alpha_2-\beta_2)&\cdots&\cos(\alpha_2-\beta_n)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\cos(\alpha_n-\beta_1)&\cos(\alpha_n-\beta_2)&\cdots&\cos(\alpha_n-\beta_n)\end{vmatrix}=0.$$

证 将行列式 D_n 表示成两个行列式的乘积,再利用三角函数的加法公式,可得

$$D_n=\left|\begin{bmatrix}\cos\alpha_1&\sin\alpha_1\\\cos\alpha_2&\sin\alpha_2\\\vdots&\vdots\\\cos\alpha_n&\sin\alpha_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta_1&\cos\beta_2&\cdots&\cos\beta_n\\\sin\beta_1&\sin\beta_2&\cdots&\sin\beta_n\end{bmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{bmatrix}\cos\alpha_1&\sin\alpha_1&0&\cdots&0\\\cos\alpha_2&\sin\alpha_2&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\\cos\alpha_n&\sin\alpha_n&0&\cdots&0\end{bmatrix}_{n\times n}\begin{bmatrix}\cos\beta_1&\cos\beta_2&\cdots&\cos\beta_n\\\sin\beta_1&\sin\beta_2&\cdots&\sin\beta_n\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}_{n\times n}\right|$$

$$=\begin{vmatrix}\cos\alpha_1&\sin\alpha_1&0&\cdots&0\\\cos\alpha_2&\sin\alpha_2&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\\cos\alpha_n&\sin\alpha_n&0&\cdots&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\cos\beta_1&\cos\beta_2&\cdots&\cos\beta_n\\\sin\beta_1&\sin\beta_2&\cdots&\sin\beta_n\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{vmatrix}$$

$$=0,\quad n\geqslant 3.$$

例 10 证明 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & \\ c_1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1c_1 & & \\ 1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1}c_{n-1} \\ & & 1 & a_n \end{vmatrix}$.

证 分别记上式左、右两端的 n 阶行列式为 D_n 和 Δ_n.

当 $n=1$ 时，$D_1=\Delta_1=a_1$.

当 $n=2$ 时，容易算得 $D_2=a_1a_2-b_1c_1=\Delta_2$.

假设 $n\leqslant k$ 时，$D_n=\Delta_n$. 当 $n=k+1$ 时，将 D_{k+1} 和 Δ_{k+1} 先按第一行展开，再将展开式中第二个行列式按第一列展开，得

$$D_{k+1}=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & & \\ c_2 & a_3 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_k \\ & & c_k & a_{k+1} \end{vmatrix}-b_1c_1\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & & \\ c_3 & a_4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_k \\ & & c_k & a_{k+1} \end{vmatrix}=a_1D_k-b_1c_1D_{k-1},$$

$$\Delta_{k+1}=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2c_2 & & \\ 1 & a_3 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_kc_k \\ & & 1 & a_{k+1} \end{vmatrix}-b_1c_1\begin{vmatrix} a_3 & b_3c_3 & & \\ 1 & a_4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_kc_k \\ & & 1 & a_{k+1} \end{vmatrix}=a_1\Delta_k-b_1c_1\Delta_{k-1},$$

所以由归纳假设知 $D_{k+1}=\Delta_{k+1}$，从而对任意 $n=1,2,\cdots$，都有 $D_n=\Delta_n$ 成立.

注 对于没有指明阶数的行列式，首先要确定行列式的阶数.

例 11 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_{n-1} & a_1a_n \\ a_2a_1 & 2+a_2^2 & \cdots & a_2a_{n-1} & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}a_1 & a_{n-1}a_2 & \cdots & (n-1)+a_{n-1}^2 & a_{n-1}a_n \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_{n-1}a_n & n+a_n^2 \end{vmatrix}$.

解 把行列式 D_n 增加一行、一列变成一个与 D_n 等值的 $n+1$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_{n-1} & a_1a_n \\ 0 & a_2a_1 & 2+a_2^2 & \cdots & a_2a_{n-1} & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1}a_1 & a_{n-1}a_2 & \cdots & (n-1)+a_{n-1}^2 & a_{n-1}a_n \\ 0 & a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_na_{n-1} & n+a_n^2 \end{vmatrix},$$

将第一行乘$(-a_i)$加到第 $i+1$ 行$(i=1,2,\cdots,n)$，再将 $j+1$ 列乘$\frac{a_j}{j}$加到第一列$(j=1,2,\cdots,n)$，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{i} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{i}\right).$$

题型3 抽象行列式的计算与证明

例12 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$为四维列向量，且$|\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}_1|=a$，$|\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3|=b$，则行列式$|\boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|=$________.

解 因为$|\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}_2|=-|\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3|=-b$，所以

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2| &= -|\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2| \\ &= -|\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}_1|-|\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}_2| = b-a.\end{aligned}$$

注 利用行列式的初等变换性质是计算行列式的一个基本方法.

例13 设三阶行列式$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3|=2$，计算行列式

$$|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+16\boldsymbol{\alpha}_3|.$$

解 因为

$$[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+16\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1&1&1\\1&3&4\\1&9&16\end{bmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+16\boldsymbol{\alpha}_3| &= |\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&4\\1&9&16\end{vmatrix} \\ &= 12.\end{aligned}$$

注 利用行列式的乘积法则计算行列式也是一个非常好的思路.

例14 已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&2&-1\end{bmatrix}$，若三阶矩阵$\boldsymbol{B}$满足方程$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{E}$，则$|\boldsymbol{B}|=$________.

解 由$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{E}$，知$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$，故

$$|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}||\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|.$$

容易算得$|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=9\neq0$，$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=1$，因此$|\boldsymbol{B}|=1$.

例15 设矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为三阶矩阵，且$|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，则$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$________.

解 因为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1},$$

所以

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{B}^{-1}|=3.$$

例16 设$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$是三阶非零实矩阵，A_{ij}为a_{ij}的代数余子式，若$a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，求$|\boldsymbol{A}|$.

解 由 $a_{ij}+\boldsymbol{A}_{ij}=0$ 知 $\boldsymbol{A}_{ij}=-a_{ij}$，即

$$\boldsymbol{A}^{*}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},$$

两边取行列式得 $|\boldsymbol{A}^{*}|=|-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$，即 $|\boldsymbol{A}|^{2}=-|\boldsymbol{A}|$，从而

$$|\boldsymbol{A}|(|\boldsymbol{A}|+1)=0.$$

又 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$是三阶非零实矩阵，不妨设 $a_{11}\neq 0$，则

$$|\boldsymbol{A}|=a_{11}\boldsymbol{A}_{11}+a_{12}\boldsymbol{A}_{12}+a_{13}\boldsymbol{A}_{13}=-(a_{11}^{2}+a_{12}^{2}+a_{13}^{2})<0,$$

故 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

例 17 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 都是 n 阶矩阵，证明

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix}=\begin{cases} |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|, & \text{当 } \boldsymbol{A} \text{ 可逆}, \\ |\boldsymbol{D}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|, & \text{当 } \boldsymbol{D} \text{ 可逆}. \end{cases}$$

证 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，对分块矩阵做分块倍加行变换化为分块上三角矩阵，得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix},$$

上式两边取行列式，利用分块三角行列式的性质，得

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|.$$

当 $\boldsymbol{D}$ 可逆时，同理有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix},$$

从而

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{D}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}|.$$

例 18 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别是 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵，λ 为任意数，证明

$$\lambda^{n}|\lambda\boldsymbol{E}_{m}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=\lambda^{m}|\lambda\boldsymbol{E}_{n}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|.$$

证 因为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{m} & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_{n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{m} & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_{n} \end{bmatrix},$$

所以

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{m} & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_{n} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{m} & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_{n} \end{bmatrix},$$

从而

$$\lambda\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{m} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_{n} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{m} & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_{n} \end{bmatrix}^{-1}\left(\lambda\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{m} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_{n} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{m} & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_{n} \end{bmatrix},$$

两边取行列式，得

$$\begin{vmatrix} \lambda\boldsymbol{E}_{m}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{B} & \lambda\boldsymbol{E}_{n} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda\boldsymbol{E}_{m} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{B} & \lambda\boldsymbol{E}_{n}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \end{vmatrix},$$

故

$$\lambda^n|\lambda \boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{AB}|=\lambda^m|\lambda \boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{BA}|.$$

注 当 $\lambda=1$ 时，$|\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{BA}|$，这可以作为行列式计算的一个公式.

例 19 计算 $D_n=\begin{vmatrix} a_1^2 & 1+a_1a_2 & \cdots & 1+a_1a_n \\ 1+a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & 1+a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+a_na_1 & 1+a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{vmatrix}$.

解 根据例 18 的结果，有

$$D_n=(-1)^n\left|\boldsymbol{E}_n-\begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\right|$$

$$=(-1)^n\left|\boldsymbol{E}_2-\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_n \end{bmatrix}\right|$$

$$=(-1)^n\begin{vmatrix} 1-n & -\sum\limits_{i=1}^n a_i \\ -\sum\limits_{i=1}^n a_i & 1-\sum\limits_{i=1}^n a_i^2 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n\left[(1-n)\left(1-\sum_{i=1}^n a_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2\right].$$

题型 4 伴随矩阵的计算与应用

例 20 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}$，求 $\left|\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}\right)^{-1}-10\boldsymbol{A}^*\right|$.

解 $\left|\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}\right)^{-1}-10\boldsymbol{A}^*\right|=|3\boldsymbol{A}^{-1}-10|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}|$

$$=|3\boldsymbol{A}^{-1}-5\boldsymbol{A}^{-1}|=(-2)^3|\boldsymbol{A}^{-1}|=-16.$$

注 当题设条件与 $\boldsymbol{A}^*$ 有关，则立即联想到应用 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 来处理. 如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，即 $\boldsymbol{A}^*$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 只相差一个常数.

例 21 已知 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，试求 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$.

解 由 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，得 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{A}$. 又

$$[\boldsymbol{A}^{-1}\quad \boldsymbol{E}]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

所以

$$A=\begin{bmatrix}\frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

而 $|A^{-1}|=2$，故知

$$(A^*)^{-1}=|A^{-1}|A=\begin{bmatrix}5 & -2 & -1\\ -2 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

例 22 设矩阵 A,B 满足 $ABA^*=3AB-10E$，$|A|>0$，$A^*=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$，求 B.

解 由 $|A^*|=|A|^2=4$，$|A|>0$，得 $|A|=2$. 又由 $ABA^*=3AB-10E$，得

$$A^*ABA^*A=3A^*ABA-10A^*A,$$

即 $2B=3BA-10E$，故 $B=10(3A-2E)^{-1}$. 而

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix},$$

因此

$$B=10(3A-2E)^{-1}=10\begin{bmatrix}-5 & & \\ & 4 & \\ & & -5\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & & \\ & \frac{5}{2} & \\ & & -2\end{bmatrix}.$$

注 对于涉及矩阵方程的题型，一般先对已知关系式进行化简，再将未知矩阵从中分离出来，得到未知矩阵的表达式，最后再代值计算.

例 23 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$，且 $A^*X\left(\frac{1}{2}A^*\right)^*=8A^{-1}X+E$，求矩阵 X.

解 因为 $|A|=4\neq 0$，所以 A 可逆. 由 $A^*=|A|A^{-1}=4A^{-1}$，得

$$\left(\frac{1}{2}A^*\right)^*=(2A^{-1})^*=|2A^{-1}|(2A^{-1})^{-1}=\frac{2^3}{|A|}\cdot\frac{1}{2}A=A,$$

代入题中的矩阵方程，得 $4A^{-1}XA=8A^{-1}X+E$，从而 $4XA=8X+A$，故

$$X(A-2E)=\frac{1}{4}A.$$

由于

$$\begin{bmatrix}A-2E\\ A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

因此

$$X=\frac{1}{4}A(A-2E)^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

注 在计算 $X(A-2E)=\frac{1}{4}A$ 时，也可以先取转置，得 $(A-2E)^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}=\frac{1}{4}A^{\mathrm{T}}$，利用初等行变换将 $\left[(A-2E)^{\mathrm{T}}\quad \frac{1}{4}A^{\mathrm{T}}\right]$ 中的 $(A-2E)^{\mathrm{T}}$ 化为单位矩阵，则 $\frac{1}{4}A^{\mathrm{T}}$ 就化为 X^{T}.

题型5 用行列式判定可逆矩阵

例24 证明可逆上三角矩阵的逆矩阵仍是上三角矩阵.

证 记可逆上三角矩阵 $A=[a_{ij}]$ 中元 a_{ij} 的代数余子式为 $A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则当 $1\leqslant j<i\leqslant n$ 时，$a_{ij}=0$，因此当 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 时，a_{ij} 的余子式 M_{ij} 仍是上三角行列式，且其主对角元必有零，于是 $M_{ij}=0$，从而 $A_{ij}=0(1\leqslant i<j\leqslant n)$. 所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\&&\ddots&\vdots\\&&&A_{nn}\end{bmatrix}$$

是上三角矩阵.

注 可逆上三角矩阵的逆矩阵仍是上三角矩阵，可逆下三角矩阵的逆矩阵仍是下三角矩阵，可逆对角矩阵的逆矩阵仍是对角矩阵.

例25 设 A,B 为 n 阶矩阵，且 $A^2=B^2$，$|A|\neq|B|$，证明 $A+B$ 是不可逆矩阵.

证 因为 $A^2=B^2$，所以

$$|A||A+B|=|A^2+AB|=|B^2+AB|=|A+B||B|,$$

即

$$(|A|-|B|)|A+B|=0,$$

从而由 $|A|\neq|B|$ 知 $|A+B|=0$，于是 $A+B$ 是不可逆矩阵.

例26 设 A 是主对角元均为零的四阶实对称可逆矩阵，且

$$B=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&k&0\\0&0&0&l\end{bmatrix},\quad k>0,l>0.$$

(1) 计算 $|E+AB|$，并分析 A 中元满足什么条件时，$E+AB$ 可逆；

(2) 当 $E+AB$ 可逆时，证明 $(E+AB)^{-1}A$ 为实对称矩阵.

解 (1) 设 $A=[a_{ij}]_{4\times4}$，则 $a_{ii}=0(i=1,2,3,4)$，$a_{ij}=a_{ji}(i\neq j)$，从而

$$E+AB=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{12}&0&a_{23}&a_{24}\\a_{13}&a_{23}&0&a_{34}\\a_{14}&a_{24}&a_{34}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&k&0\\0&0&0&l\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & ka_{13} & la_{14}\\ 0 & 1 & ka_{23} & la_{24}\\ 0 & 0 & 1 & la_{34}\\ 0 & 0 & ka_{34} & 1\end{bmatrix},$$

于是$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}|=1-kla_{34}^2$,故当$a_{34}^2\neq\dfrac{1}{kl}$时,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$可逆.

(2) 由$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$可逆,有

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})]^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B})^{-1}.$$

因为$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为实对称矩阵,所以$\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B},(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B})^{-1}$都是实对称矩阵,从而$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}$为实对称矩阵.

注 两实对称矩阵之和仍是实对称矩阵,实对称矩阵的逆矩阵是实对称矩阵.

题型 6 Cramer 法则的应用

例 27 若一元n次方程$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$有$n+1$个不同的根,证明$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\equiv 0$.

证 设$x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$是题中一元n次方程的$n+1$个互异的根,即

$$\begin{cases}a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_nx_1^n=0,\\ a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_2^n=0,\\ \qquad\vdots\\ a_0+a_1x_{n+1}+a_2x_{n+1}^2+\cdots+a_nx_{n+1}^n=0,\end{cases}$$

将上式看做以$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$为未知量的齐次线性方程组,其系数行列式D是$n+1$阶 Vandermonde 行列式的转置.由于$x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$互异,因此$D\neq 0$,故由 Cramer 法则知上述齐次方程组只有零解$a_0=a_1=a_2=\cdots=a_n=0$,从而$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\equiv 0$.

例 28 证明三条不同的直线

$$ax+by+c=0,\quad bx+cy+a=0,\quad cx+ay+b=0$$

相交于一点的充要条件是$a+b+c=0$.

证 必要性.设所给三条直线相交于点$M(x_0,y_0)$,则$x=x_0,y=y_0,z=1$可看做齐次方程组

$$\begin{cases}ax+by+cz=0,\\ bx+cy+az=0,\\ cx+ay+bz=0\end{cases}$$

的非零解,从而其系数行列式满足

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0.$$

因三条直线互不相同,故a,b,c不全相同,所以$a+b+c=0$.

充分性.如果$a+b+c=0$,则将方程组(Ⅰ)

$$\begin{cases}ax+by=-c,\\ bx+cy=-a,\\ cx+ay=-b\end{cases}$$

的第一、二两个方程加到第三个方程,得同解方程组(Ⅱ)

$$\begin{cases} ax+by=-c, \\ bx+cy=-a. \end{cases}$$

若方程组(Ⅱ)的系数行列式 $ac-b^2=0$,则 $ac=b^2\geqslant 0$. 由 $b=-(a+c)$得

$$ac=[-(a+c)]^2=a^2+2ac+c^2,$$

于是 $ac=-(a^2+c^2)\leqslant 0$,从而 $ac=0$. 不妨设 $a=0$,由 $b^2=ac$ 得 $b=0$,再由 $a+b+c=0$ 得 $c=0$,与已知矛盾. 故方程组(Ⅱ)的系数行列式不为零. 由 Cramer 法则知,方程组(Ⅱ)有唯一解,从而方程组(Ⅰ)有唯一解,即题中三条不同直线相交于一点.

题型7 矩阵秩的计算与证明

例29 设 $n(n\geqslant 3)$阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{bmatrix}$,rank $\boldsymbol{A}=n-1$,则 a 必为 【 】

(A) 1; (B) $\dfrac{1}{1-n}$; (C) -1; (D) $\dfrac{1}{n-1}$.

解 先将 $|\boldsymbol{A}|$ 其他列都加到第一列,然后提取第一列的公因子$[(n-1)a+1]$,再将第一列的$(-a)$倍加到其他各列,得

$$|\boldsymbol{A}|=(1-a)^{n-1}[(n-1)a+1].$$

由 rank $\boldsymbol{A}=n-1$,知$|\boldsymbol{A}|=0$,从而 $a=1$ 或 $a=\dfrac{1}{1-n}$.

当 $a=1$ 时,rank $\boldsymbol{A}=1$,不合题意;当 $a=\dfrac{1}{1-n}$时,rank $\boldsymbol{A}=n-1$,故选(B).

例30 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,则 【 】

(A) $\text{rank}[\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{AB}]=\text{rank}\boldsymbol{A}$; (B) $\text{rank}[\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{BA}]=\text{rank}\boldsymbol{A}$;

(C) $\text{rank}[\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{B}]=\max\{\text{rank}\boldsymbol{A},\text{rank}\boldsymbol{B}\}$; (D) $\text{rank}[\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{B}]=\text{rank}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}]$.

解 记 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$,即矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{C}$ 有解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$,因此

$$\text{rank}\boldsymbol{A}=\text{rank}[\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{C}]=\text{rank}[\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{AB}].$$

所以选(A).

(B)不成立的反例:$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(C)和(D)不成立的反例:$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

例31 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$,若 rank $\boldsymbol{A}=3$,则 $k=$________.

解 由于 rank $\boldsymbol{A}=3$,因此 $\boldsymbol{A}$ 的所有四阶子式全为零,特别地 $\boldsymbol{A}$ 的前四行构成的行列式

满足 $12(1-k)=0$，解得 $k=1$.

例 32 设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$为 3×1 矩阵，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$，证明：

(1) $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\leqslant2$；

(2) 若 $\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$，则 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}<2$.

证 (1) 因$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$为三维列向量，故 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\leqslant1$，$\operatorname{rank}(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant1$，于是

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant2.$$

(2) 由$\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$，得 $\boldsymbol{A}=(1+k^2)\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$，从而

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}[(1+k^2)\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}]\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})\leqslant1<2.$$

注 对于涉及矩阵秩的题型，应充分利用矩阵的结构特点以及秩的不等式.

例 33 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}\neq\pm\boldsymbol{E}$，证明

$$[\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})-1][\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})-1]=0.$$

证 由 $\boldsymbol{A}\neq\pm\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{0}$，即

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\geqslant1,\quad \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\geqslant1,$$

又由$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，得$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$，于是

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant3,$$

从而 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$和 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$至少有一个为 1，因此

$$[\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})-1][\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})-1]=0.$$

例 34 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶矩阵，证明 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E})\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})$.

证 对分块矩阵做两次分块倍加行变换，得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} & \boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} & \boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} & \boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E}\end{bmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})&=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\\&=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} & \boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} & \boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\geqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E}).\end{aligned}$$

同步练习

1. 填空题

(1) 设 $D=\begin{vmatrix}1&1&3&1\\1&0&0&0\\2&1&0&3\\4&5&1&2\end{vmatrix}$，$A_{ij}$是 D 中元 a_{ij}的代数余子式，则 $A_{41}+A_{42}+A_{43}=$________.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，则$|2\boldsymbol{A}^{-1}|=$________.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{3}$，则$\left|\left(\dfrac{1}{7}\boldsymbol{A}\right)^{-1}-12\boldsymbol{A}^*\right|=$________.

(4) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=a$，$|\boldsymbol{B}|=b\neq0$，则 $\left|-3\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}\right|=$________.

(5) 设已知 $|\boldsymbol{A}|=3$，则 $|(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^k|=$________ ($k$ 为正整数).

(6) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&a&1\\4&2&a\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为三阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{0}$，则 $\mathrm{rank}\boldsymbol{B}=$________.

(7) 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]$，$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_1]$，$\boldsymbol{C}=2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，且 $|\boldsymbol{A}|=1$，则 $|\boldsymbol{C}|=$________.

(8) 设 $\boldsymbol{A}_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-2\\-3&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_2^{-1}\end{bmatrix}$，则 $|\boldsymbol{B}^*|=$________.

(9) 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{bmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=$________.

(10) 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{bmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}^*)^*=$________.

2. 单选题

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 3×1 矩阵，$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]$，$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_2\quad 2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]$，若 $|\boldsymbol{A}|=3$，则 【　】

(A) $|\boldsymbol{B}|=3$；　(B) $|\boldsymbol{B}|=6$；　(C) $|\boldsymbol{B}|=-3$；　(D) $|\boldsymbol{B}|=-6$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则 $||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^*|$ 等于 【　】

(A) $|\boldsymbol{A}|^2$；　(B) $|\boldsymbol{A}|^n$；　(C) $|\boldsymbol{A}|^{2n}$；　(D) $|\boldsymbol{A}|^{2n-1}$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆，将 $\boldsymbol{A}$ 的第二列加到第一列得到 $\boldsymbol{B}$，则 【　】

(A) 将 $\boldsymbol{A}^*$ 的第二列加到第一列得到 $\boldsymbol{B}^*$；

(B) 将 $\boldsymbol{A}^*$ 的第二行加到第一行得到 $\boldsymbol{B}^*$；

(C) 将 $\boldsymbol{A}^*$ 的第二行的 (-1) 倍加到第一行得到 $\boldsymbol{B}^*$；

(D) 将 $\boldsymbol{A}^*$ 的第一行的 (-1) 倍加到第二行得到 $\boldsymbol{B}^*$.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，则 $(-\boldsymbol{A})^*$ 等于 【　】

(A) $-\boldsymbol{A}^*$；　(B) $\boldsymbol{A}^*$；　(C) $(-1)^n\boldsymbol{A}^*$；　(D) $(-1)^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，则下列结论正确的是 【　】

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$；　(B) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$；

(C) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$；　(D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geqslant3)$ 阶矩阵，k 为常数，且 $k\neq0,\pm1$，则必有 $(k\boldsymbol{A})^*$ 等于 【　】

(A) $k\boldsymbol{A}^*$；　(B) $k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$；　(C) $k^n\boldsymbol{A}^*$；　(D) $k^{-1}\boldsymbol{A}^*$.

(7) 设三阶行列式 $|\boldsymbol{A}|<0$，且 $\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{bmatrix}\boldsymbol{A}^*\begin{bmatrix}1&&\\&1&-2\\&&1\end{bmatrix}=-\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}$ 为 【　】

(A) $\begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & -2 & \end{bmatrix}$；　　(B) $\begin{bmatrix} & & -1 \\ & -1 & \\ -1 & 2 & \end{bmatrix}$；

(C) $\begin{bmatrix} & & 1 \\ -2 & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$；　　(D) $\begin{bmatrix} & & -1 \\ 2 & -1 & \\ -1 & & \end{bmatrix}$.

(8) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价，则必有　【　】

(A) 当 $|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=a$；

(B) 当 $|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=-a$；

(C) 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$；

(D) 当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$.

(9) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{3\times 3}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$a_{11}=a_{12}=a_{13}>0$，则 a_{11} 为　【　】

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；　(B) 3；　(C) $\dfrac{1}{3}$；　(D) $\sqrt{3}$.

(10) 设分块矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{E}_{n-1} \\ -1 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$，则　【　】

(A) $|\boldsymbol{A}|=1$；　(B) $|\boldsymbol{A}|=-1$；

(C) $|\boldsymbol{A}|=(-1)^{n-1}$；　(D) $|\boldsymbol{A}|=(-1)^n$.

3. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a-x & a-y & a-z \\ b-x & b-y & b-z \\ c-x & c-y & c-z \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

4. 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

5. 证明奇数阶反对称矩阵的行列式为零.

6. 计算 n 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ (-1)^n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} a_n & x & \cdots & x & x \\ y & a_{n-1} & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y & y & \cdots & a_2 & x \\ y & y & \cdots & y & a_1 \end{vmatrix}$.

7. 设$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$为三阶矩阵，A_{ij}为$\boldsymbol{A}$中元a_{ij}的代数余子式，且$A_{ij}=a_{ij}$，$a_{11}\neq 0$，证明$\boldsymbol{A}$可逆，并求$|\boldsymbol{A}|$.

8. 设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$是$3\times 1$矩阵，$\boldsymbol{A}_1=[\boldsymbol{\alpha}\ \ \boldsymbol{\beta}\ \ \boldsymbol{\gamma}]$，$\boldsymbol{A}_2=[2\boldsymbol{\alpha}\ \ 3\boldsymbol{\beta}\ \ \boldsymbol{\gamma}]$，若$|\boldsymbol{A}_1|=2$，求分块行列式$\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{0} \end{vmatrix}$.

9. 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，矩阵$\boldsymbol{X}$满足$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$，求$\boldsymbol{X}$.

10. 设$\boldsymbol{A}$的逆矩阵为$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$，$A_{ij}$为$\boldsymbol{A}$中元$a_{ij}$的代数余子式，求$A_{12}+2A_{34}-A_{41}$.

11. 设$\boldsymbol{A}$为n阶可逆矩阵，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$为$n\times 1$矩阵，$k$为常数，记分块矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & k \end{bmatrix}.$$

(1) 计算$|\boldsymbol{B}|$；

(2) 证明$\boldsymbol{C}$可逆的充要条件是$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}\neq k$.

单元测验

一、填空题(每小题3分，共18分)

1. 已知三阶矩阵$\boldsymbol{A}$的逆矩阵为$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^*=$________.

2. 设$D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，则$M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=$________.

3. 设 $D_1=\begin{vmatrix}1&3&2\\2&2&3\\3&5&5\end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix}\lambda&0&1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}$, $D_1=D_2$, 则 $\lambda=$________.

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}|=3$, $|\boldsymbol{B}|=-2$, 则 $|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=$________.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$, 且 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$________.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n\geqslant 2)$ 阶矩阵, $|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$, 则 $\left||\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{A}\right|=$________.

二、单选题(每小题 3 分,共 18 分)

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是同阶方阵,下列说法正确的是 【 】

(A) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$;

(B) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$, 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$;

(C) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$;

(D) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n(n>1)$ 阶可逆矩阵, k 为非零常数, 则下列结论正确的是 【 】

(A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$;

(B) $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$;

(C) $|(k\boldsymbol{A})^{-1}|=\frac{1}{k}|\boldsymbol{A}^{-1}|$;

(D) $[(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}]^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

3. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{bmatrix}$, 若 rank $\boldsymbol{A}=2$, 则必有 【 】

(A) $a=b$ 或 $a+2b=0$;　　(B) $a=b$ 或 $a+2b\neq 0$;

(C) $a\neq b$ 且 $a+2b=0$;　　(D) $a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$.

4. 设 $n(n\geqslant 2)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 【 】

(A) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$;　　(B) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n+1}\boldsymbol{A}$;

(C) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n+2}\boldsymbol{A}$;　　(D) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.

5. 齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0,\\x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵记为 $\boldsymbol{A}$, 若存在三阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$, 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$, 则 【 】

(A) $\lambda=-2$ 且 $|\boldsymbol{B}|=0$;　　(B) $\lambda=1$ 且 $|\boldsymbol{B}|=0$;

(C) $\lambda=-2$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$;　　(D) $\lambda=1$ 且 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$.

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为二阶矩阵, 若 $|\boldsymbol{A}|=k$, $|\boldsymbol{B}|=l$, 则 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}^*$ 为 【 】

(A) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&l\boldsymbol{B}^*\\k\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}$;　　(B) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&k\boldsymbol{B}^*\\l\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}$;

(C) $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & l\mathbf{A}^* \\ k\mathbf{B}^* & \mathbf{0} \end{bmatrix}$；　　　　(D) $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & k\mathbf{A}^* \\ l\mathbf{B}^* & \mathbf{0} \end{bmatrix}$.

三、(10 分)　计算行列式 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 \end{vmatrix}$.

四、(10 分)　设行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & -4 & 8 \\ -1 & 8 & -8 & 16 \end{vmatrix}$,求 D 中各元的代数余子式之和.

五、(10 分)　设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$,且 $8\mathbf{A}+\mathbf{A}^*\mathbf{XA}=8\mathbf{AXA}+8\mathbf{E}$,求矩阵 $\mathbf{X}$.

六、(10 分)　已知 $2n+1$ 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}=\mathbf{E}$,证明 $|\mathbf{E}-\mathbf{A}^2|=0$.

七、(12 分)　已知 $\mathbf{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{3\times3}$,满足 $|\mathbf{A}|=1$, $a_{33}=-1$, $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,3)$,其中 A_{ij} 为元 a_{ij} 的代数余子式,且 $\mathbf{b}=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$,求方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的解.

八、(12 分)　设 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ 均为 n 阶矩阵,证明 $\mathbf{M}=\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{A} \\ \mathbf{C}-\mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$ 可逆的充要条件是 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 可逆. 当 $\mathbf{M}$ 可逆时,求其逆.

习题选解

(A)

2. 计算下列行列式：

(4) $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$.

解　(4) 将题中的五阶行列式记为 D_5,按第一行展开得到递推关系式

$$D_5=(1-a)D_4+aD_3.$$

方法 1(递推法)　上式可变形为 $D_5-D_4=-a(D_4-D_3)$,于是

$$D_1=1-a,$$
$$D_2-D_1=a^2,$$
$$D_3-D_2=-a(D_2-D_1)=-a^3,$$
$$D_4-D_3=(-a)^2(D_2-D_1)=a^4,$$
$$D_5-D_4=(-a)^3(D_2-D_1)=-a^5,$$

将上述五个式子左右两端分别相加,得到

$$D_5 = -a^5 + a^4 - a^3 + a^2 - a + 1.$$

方法 2(数学归纳法)　由前可知 $D_1 = 1 - a, D_2 = 1 - a + a^2$.

假设 $D_k = \sum_{i=0}^{k} (-a)^i (k \leqslant n-1)$ 成立,则

$$\begin{aligned}
D_n &= (1-a)D_{n-1} + aD_{n-2} = (1-a)\sum_{i=0}^{n-1}(-a)^i + a\sum_{i=0}^{n-2}(-a)^i \\
&= (1-a)(-a)^{n-1} + (1-a)\sum_{i=0}^{n-2}(-a)^i + a\sum_{i=0}^{n-2}(-a)^i \\
&= (-a)^n + (-a)^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2}(-a)^i = \sum_{i=0}^{n}(-a)^i,
\end{aligned}$$

故结论在 $k=n$ 时也成立,因此 $D_5 = \sum_{i=0}^{5}(-a)^i$.

注　第(4)小题中的五阶行列式若改为 n 阶行列式,仍可用这两个方法来求.

14. 计算下列 n 阶行列式:

(3) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & & & \\ 2 & 5 & 3 & & \\ & 2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 3 \\ & & & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

解　(3) 将题中的 n 阶行列式 D_n 按第一列展开,得 $D_n = xD_{n-1} + a_n$,从而

$$\begin{aligned}
D_n &= xD_{n-1} + a_n \\
&= x^2 D_{n-2} + a_{n-1}x + a_n \\
&= x^3 D_{n-3} + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \\
&\qquad \vdots \\
&= x^{n-1}D_1 + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \\
&= x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.
\end{aligned}$$

(4) 将题中的 n 阶行列式 D_n 按第一行展开,得 $D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$,从而

$$\begin{aligned}
D_n - 2D_{n-1} &= 3(D_{n-1} - 2D_{n-2}) \\
&= 3^2(D_{n-2} - 2D_{n-3}) = \cdots = 3^{n-2}(D_2 - 2D_1),
\end{aligned}$$

因 $D_1 = 5, D_2 = 19$,故 $D_n - 2D_{n-1} = 3^n$,于是

$$\begin{aligned}
D_n &= 3^n + 2D_{n-1} \\
&= 3^n + 2(3^{n-1} + 2D_{n-2}) \\
&= 3^n + 2 \times 3^{n-1} + 2^2 D_{n-2} \\
&= 3^n + 2 \times 3^{n-1} + 2^2 \times 3^{n-2} + 2^3 D_{n-3} \\
&\qquad \vdots
\end{aligned}$$

$$= 3^n + 2\times 3^{n-1} + 2^2\times 3^{n-2} + \cdots + 2^{n-2}\times 3^2 + 2^{n-1}D_1$$
$$= 3^n + 2\times 3^{n-1} + 2^2\times 3^{n-2} + \cdots + 2^{n-2}\times 3^2 + 2^{n-1}\times 5$$
$$= 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

(B)

15. 计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{vmatrix}$.

解 记题中行列式为 $|\boldsymbol{A}|$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a^2+b^2+c^2+d^2)\boldsymbol{E}$，从而

$$|\boldsymbol{A}|^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4,$$

即

$$|\boldsymbol{A}| = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

显然，由行列式的完全展开式知 $|\boldsymbol{A}|$ 中含有 $-a^4$，故 $|\boldsymbol{A}|=-(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

16. 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 2x_1^2-1 & 2x_2^2-1 & 2x_3^2-1 & 2x_4^2-1 \\ 4x_1^3-3x_1 & 4x_2^3-3x_2 & 4x_3^3-3x_3 & 4x_4^3-3x_4 \end{vmatrix}$.

解 记题中的四阶行列式为 D_4，则

$$D_4 = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ 4x_1^3-3x_1 & 4x_2^3-3x_2 & 4x_3^3-3x_3 & 4x_4^3-3x_4 \end{vmatrix}$$

$$= 8\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix}$$

$$= 8\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = 8\prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(x_j - x_i).$$

17. 计算 $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1}+\dfrac{x}{a_1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1}+\dfrac{x}{a_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1}+\dfrac{x}{a_n} \end{vmatrix}$.

解 记题中的 n 阶行列式为 D_n，则

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & \dfrac{x}{a_1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & \dfrac{x}{a_2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & \dfrac{x}{a_n}\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)+\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}x\begin{vmatrix}a_1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^{n-1} & 1\\ a_2 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^{n-1} & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_n & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^{n-1} & 1\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)+(-1)^{n-1}x\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

$$=\left(1+(-1)^{n-1}x\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

18. 设 $D=\begin{vmatrix}3 & -5 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0 & -5\\ -1 & 3 & 1 & 3\\ 2 & -4 & -1 & -3\end{vmatrix}$，求 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$.

解 根据行列式 D 可知

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & -5\\ -1 & 3 & 1 & 3\\ 2 & -4 & -1 & -3\end{vmatrix}=4.$$

19. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}k & 1 & 1 & 1\\ 1 & k & 1 & 1\\ 1 & 1 & k & 1\\ 1 & 1 & 1 & k\end{bmatrix}$，且 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=3$，求 k.

解 由 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=3$ 知 $|\boldsymbol{A}|=0$，从而

$$|\boldsymbol{A}|=(k+3)(k-1)^3=0,$$

解得 $k=-3$ 或 1.

当 $k=-3$ 时，$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=3$；当 $k=1$ 时，$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=1\neq 3$，不符合题意. 因此 $k=-3$.

20. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a & \cdots & a\\ a & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & a\\ a & \cdots & a & 1\end{bmatrix}$ 的秩为 $n-1$，且 $n\geqslant 3$，求参数 a.

解 首先算出 $|\boldsymbol{A}|=[1+(n-1)a](1-a)^{n-1}$.

由 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n-1$ 知 $|\boldsymbol{A}|=0$，于是 $a=1$ 或 $a=\dfrac{1}{1-n}$.

当 $a=1$ 时，rank $\boldsymbol{A}=1$，与条件相矛盾.

当 $a=\dfrac{1}{1-n}$时，$\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 阶顺序主子式不等于 0，从而 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式的阶数为 $n-1$，即 rank $\boldsymbol{A}=n-1$. 所以 $a=\dfrac{1}{1-n}$即为所求.

21. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，$|\boldsymbol{A}|<0$，求$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

解 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ 有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|&=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|\\&=|\boldsymbol{A}||(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|,\end{aligned}$$

即

$$(1-|\boldsymbol{A}|)|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0.$$

又由$|\boldsymbol{A}|<0$ 知 $1-|\boldsymbol{A}|>0$，故$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$.

22. 对三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$，先交换第一行和第三行，然后将第二列的(-2)倍加到第三列，得到$-\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{A}$.

解 由题设条件知

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{A}^*\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}=-\boldsymbol{E},$$

从而

$$\boldsymbol{A}^*=-\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&-1&-2\\-1&0&0\end{bmatrix}.$$

于是

$$\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=|\boldsymbol{A}|\begin{bmatrix}0&0&-1\\2&-1&0\\-1&0&0\end{bmatrix},$$

而$|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}^*|=1$，故$|\boldsymbol{A}|=\pm1$，因此

$$\boldsymbol{A}=\pm\begin{bmatrix}0&0&-1\\2&-1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}.$$

23. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为二阶矩阵，若$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，求$\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}$的伴随矩阵.

解 因为$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，且

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\end{vmatrix}=(-1)^4\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=6,$$

所以

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}^*=\begin{vmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\end{vmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}^{-1}=6\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&2\boldsymbol{B}^*\\3\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}.$$

24. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 都是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$，证明 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}|$.

解 对分块矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}$ 做分块倍加行变换化为分块上三角矩阵，即

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\end{bmatrix},$$

从而由 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$，可得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\end{vmatrix}\\ &=|\boldsymbol{A}||-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}|=|-\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}|\\ &=|-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}|=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}|.\end{aligned}$$

25. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{B}^{-1}$，证明

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})=n.$$

证 由 $\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{B}^{-1}$ 得 $\boldsymbol{ABAB}=\boldsymbol{E}$，即 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{0}$，从而

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})\leqslant n.$$

而 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})+(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})=2\boldsymbol{E}$，故

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})\geqslant\operatorname{rank}(2\boldsymbol{E})=n,$$

所以

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})=n.$$

26. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$n\geqslant2$，证明

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^*=\begin{cases}n, & \operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n,\\ 1, & \operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n-1,\\ 0, & \operatorname{rank}\boldsymbol{A}<n-1.\end{cases}$$

证 当 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq0$，故 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\neq0$，所以 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^*=n$.

当 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n-1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 有一个 $n-1$ 阶子式不等于 0，故 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{0}$，即 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^*\geqslant1$；由 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}<n$ 知 $|\boldsymbol{A}|=0$，从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，故 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^*\leqslant n-\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=1$，于是 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^*=1$.

当 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}<n-1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的所有 $n-1$ 阶子式均等于 0，即 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{0}$，故 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^*=0$.

27. 设有方程组

$$\begin{cases}(a+3)x_1+x_2+2x_3=a,\\ ax_1+(a-1)x_2+x_3=a,\\ 3(a+1)x_1+ax_2+(a+3)x_3=3,\end{cases}$$

讨论 a 取何值时，方程组无解、有唯一解、有无穷多解，当有无穷多解时求出通解.

解 不难求得方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix}a+3 & 1 & 2\\ a & a-1 & 1\\ 3(a+1) & a & a+3\end{vmatrix}=a^2(a-1).$$

当 $a\neq 0$ 且 $a\neq 1$ 时，方程组有唯一解.

当 $a=0$ 时，对方程组的增广矩阵做初等行变换：

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 2 & 0\\0 & -1 & 1 & 0\\3 & 0 & 3 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3 & 1 & 2 & 0\\0 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix},$$

即知方程组无解.

当 $a=1$ 时，对方程组的增广矩阵做初等行变换：

$$\begin{bmatrix}4 & 1 & 2 & 1\\1 & 0 & 1 & 1\\6 & 1 & 4 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & -2 & -3\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩均为 2，从而方程组有无穷多解，其通解为

$$\begin{cases}x_1=-x_3+1,\\x_2=2x_3-3,\\x_3=x_3,\end{cases}$$

即

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-3\\0\end{bmatrix},\quad k\text{ 为任意数.}$$

28. 设 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\\0 & -3 & 0 & 8\end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{ABA}^{-1}=\boldsymbol{BA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解 由 $\boldsymbol{ABA}^{-1}-\boldsymbol{BA}^{-1}=3\boldsymbol{E}$，得 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{A}$，从而 $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{E}$，即

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{E}.$$

因 $|\boldsymbol{A}|^3=|\boldsymbol{A}^*|=8$，故 $|\boldsymbol{A}|=2$，于是由上式得 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{E}$.

由于

$$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\-1 & 0 & 1 & 0\\0 & 3 & 0 & -6\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\\0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6}\end{bmatrix},$$

因此

$$\boldsymbol{B}=6(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0 & 0\\0 & 6 & 0 & 0\\6 & 0 & 6 & 0\\0 & 3 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

29. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的每一行各元之和都等于 k，证明 $k\neq 0$ 且 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的每一行各元之和都等于 $\frac{1}{k}$.

证 记 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，则有 $\boldsymbol{A\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}$. 因 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，故$\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$，由此即知 $k\neq0$，于是$\frac{1}{k}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$，这表明 $\boldsymbol{A}^{-1}$的每一行各元之和都等于$\frac{1}{k}$.

30. 求由下列给定的平面上四个点所确定的四边形的面积.

(1) $(1,-1),(-2,1),(5,6),(2,8)$；

(2) $(0,0),(1,4),(2,-5),(3,0)$.

解 (1) 先平移四边形，使其顶点$(1,-1)$成为原点，即将每个顶点的坐标都减去$(1,-1)$，这样，新的四边形的面积与原来的四边形面积相等，其顶点为$(0,0),(-3,2),(4,7),(1,9)$，显然这是平行四边形. 作两个列向量

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix},$$

则所求四边形的面积等于以 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为邻边的平行四边形的面积，即

$$|\det[\boldsymbol{\alpha}\quad\boldsymbol{\beta}]|=\begin{vmatrix}-3&4\\2&7\end{vmatrix}=-29.$$

(2) 易知这不是平行四边形. 以$(0,0)$为起点作三个列向量

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}2\\-5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix},$$

通过作图可知，以$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}$为邻边的三角形的面积 S_1 与以$\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta}$为邻边的三角形的面积 S_2 之和等于所求四边形的面积. 而$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}$确定的三角形的面积等于它们确定的平行四边形面积的一半，即

$$S_1=\frac{1}{2}|\det[\boldsymbol{\alpha}\quad\boldsymbol{\gamma}]|=\frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix}1&3\\4&0\end{bmatrix}\right|=6;$$

同理，$\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta}$确定的三角形的面积为

$$S_2=\frac{1}{2}|\det[\boldsymbol{\gamma}\quad\boldsymbol{\beta}]|=\frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix}3&2\\0&-5\end{bmatrix}\right|=7.5,$$

故所求四边形的面积为 $S_1+S_2=13.5$.

31. 求由下列给定的空间中四个点所确定的平行六面体的体积.

(1) 一个顶点为原点，与它相邻的三个顶点为$(0,-1,1),(0,2,1),(-3,0,0)$；

(2) 一个顶点为$(1,1,1)$，与它相邻的三个顶点为$(2,1,-1),(2,3,5),(8,2,1)$.

解 (1) 以原点为起点作三个列向量

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}-3\\0\\0\end{bmatrix},$$

从而所求平行六面体的体积等于

$$|\det[\boldsymbol{\alpha}\quad\boldsymbol{\beta}\quad\boldsymbol{\gamma}]|=\left|\det\begin{bmatrix}0&0&-3\\-1&2&0\\1&1&0\end{bmatrix}\right|=9.$$

(2) 以(1,1,1)为起点作三个列向量

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}7\\1\\0\end{bmatrix},$$

从而所求平行六面体的体积等于以$\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$,$\boldsymbol{\gamma}$为棱的平行六面体的体积,即

$$|\det[\boldsymbol{\alpha}\ \ \boldsymbol{\beta}\ \ \boldsymbol{\gamma}]|=\left|\det\begin{bmatrix}1&1&7\\0&2&1\\-2&4&0\end{bmatrix}\right|=22.$$

32. 设平面上不在同一直线上的三点为(x_i,y_i),$i=1,2,3$,证明:通过这三点的圆方程为

$$\begin{vmatrix}x^2+y^2&x&y&1\\x_1^2+y_1^2&x_1&y_1&1\\x_2^2+y_2^2&x_2&y_2&1\\x_3^2+y_3^2&x_3&y_3&1\end{vmatrix}=0.$$

证 设所求的圆方程为$x^2+y^2+ax+by+c=0$.由于三点$(x_i,y_i)$$(i=1,2,3)$均在圆上,所以这三点满足此方程,从而得到

$$\begin{cases}x^2+y^2+ax+by+c=0,\\x_1^2+y_1^2+ax_1+by_1+c=0,\\x_2^2+y_2^2+ax_2+by_2+c=0,\\x_3^2+y_3^2+ax_3+by_3+c=0,\end{cases}$$

这可看成一个四元齐次线性方程组.由于上述方程组总有非零解$(1,a,b,c)^{\mathrm{T}}$,因此该方程组的系数行列式必等于零,即

$$\begin{vmatrix}x^2+y^2&x&y&1\\x_1^2+y_1^2&x_1&y_1&1\\x_2^2+y_2^2&x_2&y_2&1\\x_3^2+y_3^2&x_3&y_3&1\end{vmatrix}=0.$$

33. 设n阶行列式$\det\boldsymbol{A}$的元都是变量t的可微函数,证明行列式的微分

$$\frac{\mathrm{d}(\det\boldsymbol{A})}{\mathrm{d}t}=\det\boldsymbol{A}_1+\det\boldsymbol{A}_2+\cdots+\det\boldsymbol{A}_n,$$

其中$\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,n)$是对矩阵$\boldsymbol{A}$的第$i$行求导,而其余各行不变所得到的矩阵.

证 设$\boldsymbol{A}=[a_{ij}(t)]_{n\times n}$,则$\det\boldsymbol{A}$是

$$a_{11}(t),a_{12}(t),\cdots,a_{1n}(t),a_{21}(t),a_{22}(t),\cdots,a_{2n}(t),\cdots,a_{n1}(t),a_{n2}(t),\cdots,a_{nn}(t)$$

的函数,而$a_{ij}(t)(i,j=1,2,\cdots,n)$又是$t$的函数,因此由复合函数求导法则得

$$\frac{\mathrm{d}(\det\boldsymbol{A})}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(\det\boldsymbol{A})}{\partial a_{ij}}\frac{\mathrm{d}a_{ij}(t)}{\mathrm{d}t}.$$

将行列式按第i行展开得

$$\det\boldsymbol{A}=a_{i1}(t)A_{i1}+a_{i2}(t)A_{i2}+\cdots+a_{in}(t)A_{in},$$

注意到代数余子式 $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in}$ 中均不含 $a_{ij}(t)$,所以

$$\frac{\partial(\det \boldsymbol{A})}{\partial a_{ij}} = A_{ij}, \quad i,j = 1,2,\cdots,n.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(\det \boldsymbol{A})}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{\mathrm{d}a_{ij}(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}a_{i1}(t)}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}a_{i2}(t)}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}a_{in}(t)}{\mathrm{d}t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\det \boldsymbol{A}_i.\end{aligned}$$

第 4 章

向量空间与线性空间

基本要求

1. 理解 n 维向量及其线性组合与线性表示的概念，理解线性表示的判别准则.

2. 理解向量组线性相关、线性无关的概念，理解线性相关性的性质及判别准则.

3. 理解向量组等价的概念，理解向量组等价的判别准则.

4. 理解向量组的极大线性无关组和向量组秩的概念，掌握求向量组的极大线性无关组及秩的方法.

5. 理解非齐次线性方程组的通解、导出方程组的基础解系与通解，掌握用初等行变换求线性方程组通解的方法.

6. 了解 n 维向量空间、子空间、生成子空间、基、维数、坐标等概念，知道基变换和坐标变换公式，会求过渡矩阵.

7. 了解内积、正交向量组和标准正交向量组的概念与性质，熟悉线性无关向量组正交规范化的 Gram-Schmidt 方法，了解标准正交基、正交矩阵的概念及其性质.

8. 知道线性空间、线性子空间、基、维数、坐标和线性变换的概念，会求线性变换在一组基下的矩阵，知道线性变换在不同基下的矩阵之间的关系.

内容综述

一、n 维向量的概念及其线性运算规律

列向量就是列矩阵，行向量就是行矩阵.

全体 n 维实(或复)向量的集合记作$\mathbb{R}^n$(或$\mathbb{C}^n$). 用$\mathbb{F}^n$代表$\mathbb{R}^n$ 或者$\mathbb{C}^n$.

矩阵的线性运算也适合于向量，且向量的加法与数乘也满足矩阵的线性运算的八条运算规律.

二、向量组的线性表示

1. 给定向量 $\boldsymbol{\beta}$ 和向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，若存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

则称 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，或称 $\boldsymbol{\beta}$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合.

2. 设有 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 n 维向量 $\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_m]$，则下列三个命题等价：

(1) 向量 $\boldsymbol{b}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示；

(2) 线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解；

(3) $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]$.

3. 向量 $\boldsymbol{b}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示且表示式是唯一的当且仅当 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]=m$.

三、向量组的线性相关性

1. 给定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，若存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0},$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，否则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关. 也就是说，若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则上式成立当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_m]$，则下列三个命题等价：

(1) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关；

(2) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解；

(3) $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}<m$，即 $\boldsymbol{A}$ 的秩小于向量组所含向量的个数 m.

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_m]$，则下列三个命题等价：

(1) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关；

(2) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解；

(3) $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=m$，即 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于向量组所含向量的个数 m.

4. 一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$.

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 对应分量成比例.

5. 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，且表示式是唯一的当且仅当向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关.

6. n 维基本向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性无关.

7. 对于 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，如果 $m>n$，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 必定线性相关.

8. 若一个向量组线性无关，则它的每个部分组都线性无关；若一个向量组的某个部分组线性相关，则该向量组线性相关.

9. 若一个向量组线性无关，则它的升维组也线性无关；若一个向量组线性相关，则它的降维组也线性相关.

10. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geqslant 2)$ 线性相关当且仅当该向量组中至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geqslant 2)$ 线性无关当且仅当该向量组中任意一个向量都不能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

注 一个向量组线性相关可以解释为该向量组的向量之间存在着线性表示关系.

11. 矩阵的初等行变换不改变列向量之间的线性相关性和线性组合关系；矩阵的初等列变换不改变行向量之间的线性相关性和线性组合关系.

四、等价向量组

1. 若向量组(Ⅱ)中每个向量都可由向量组(Ⅰ)线性表示,则称向量组(Ⅱ)可由向量组(Ⅰ)线性表示.若向量组(Ⅰ)和向量组(Ⅱ)能相互线性表示,则称向量组(Ⅰ)与向量组(Ⅱ)等价.

向量组的等价具有自反性、对称性和传递性.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_r]$,$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_s]$,那么

(1) 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示当且仅当矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解,即 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}=\operatorname{rank}[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B}]$.

(2) 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 等价当且仅当矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{BY}=\boldsymbol{A}$ 均有解,即 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}=\operatorname{rank} \boldsymbol{B}=\operatorname{rank}[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{B}]$.

3. 若向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示,且 $s>r$,则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关.

若向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示,且 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关,则 $s\leqslant r$.

4. 若两个线性无关的向量组等价,则它们所含向量个数相等.

五、向量组的秩

1. 若向量组(Ⅰ)中有含 r 个向量的部分组(Ⅱ)线性无关,且向量组(Ⅰ)中任何 $r+1$ 个向量都线性相关,则称(Ⅱ)是向量组(Ⅰ)的一个极大线性无关组,数 r 称为向量组(Ⅰ)的秩.

规定只含零向量的向量组的秩为零.

向量组的秩是唯一确定的,一个向量组的极大线性无关组不一定是唯一的.

2. 向量组(Ⅰ)的部分组(Ⅱ)为(Ⅰ)的极大线性无关组当且仅当(Ⅱ)线性无关,且(Ⅰ)中任何向量都可由向量组(Ⅱ)线性表示.

注 向量组的秩可以理解为向量组中"有效"向量的个数.

3. 若向量组(Ⅱ)可由向量组(Ⅰ)线性表示,则(Ⅱ)的秩不超过(Ⅰ)的秩.

4. 矩阵的秩等于其列向量组的秩(即列秩),也等于其行向量组的秩(即行秩).

六、线性方程组解的结构

1. 齐次方程组的解对向量加法和数乘是封闭的.

2. 齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的每个基础解系都含 $n-\operatorname{rank} \boldsymbol{A}$ 个解向量.

3. 非齐次方程组的解对向量加法和数乘是不封闭的.

4. 非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任意两解之差是其导出方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

5. 非齐次方程组的通解等于它的一个特解与导出方程组的通解之和.

七、向量空间

1. 设 V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维向量构成的非空集合,如果 V 对于加法及数乘两种运算封闭,则称集合 V 为数域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间.

若$\mathbb{F}$为实(或复)数域,则称V为实(或复)向量空间.

2. 设V,W为两个向量空间,若$W\subseteq V$,则称W是V的子空间.

3. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\in\mathbb{F}^n$,由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$生成的向量空间是指

$$\text{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\mid k_1,k_2,\cdots,k_m\in\mathbb{F}\}.$$

4. 向量空间V的一个极大线性无关向量组(Ⅰ)称为V的基,(Ⅰ)中向量个数r称为V的维数,记为$\dim V$,并称V为r维向量空间.

零空间$\{\mathbf{0}\}$的维数规定为0.

注 向量空间的维数与其所含向量的维数是两个不同的概念.

5. 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的一个极大线性无关组就是向量空间$\text{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$的一个基,向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的秩就是向量空间$\text{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$的维数.

6. 向量空间V中任一向量$\boldsymbol{\beta}$都可以由它的基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$唯一线性表示为

$$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

向量$(x_1,x_2,\cdots,x_r)^{\mathrm{T}}$称为$\boldsymbol{\beta}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$下的坐标.

7. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$是向量空间$V$的两个基,则有基变换公式

$$[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\beta}_r]=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_r]\boldsymbol{C},$$

称$\boldsymbol{C}$为由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$的过渡矩阵.易知$\boldsymbol{C}$是可逆矩阵.

8. 设在向量空间V中,由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$的过渡矩阵为$\boldsymbol{C}$,则$V$中任何向量$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$下的坐标$\boldsymbol{x}$和在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$下的坐标$\boldsymbol{y}$,满足坐标变换公式$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$,或$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}$.

八、Euclid 空间

1. 设有$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$,则$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的内积定义为

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

定义了内积的向量空间$\mathbb{R}^n$称为n维 Euclid 空间.

2. 向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$的长度(或范数)定义为

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

3. Cauchy-Schwarz 不等式:$|\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle|\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|\,\|\boldsymbol{\beta}\|$;

4. 三角不等式:$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$.

5. 两个非零实向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的夹角定义为

$$\theta=\arccos\frac{\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\,\|\boldsymbol{\beta}\|},\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

若$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=0$,则称向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$正交.零向量与任何向量正交.

6. 设$\boldsymbol{\alpha}_i\in\mathbb{R}^n,\boldsymbol{\alpha}_i\neq\mathbf{0},i=1,2,\cdots,m$,若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$两两正交,则称$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$为正交向量组;若还有$\|\boldsymbol{\alpha}_i\|=1(i=1,2,\cdots,m)$,则称$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$为标准正交向量组.

Euclid 空间$\mathbb{R}^n$的n个(标准)正交向量称为$\mathbb{R}^n$的(标准)正交基.

7. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$为 Euclid 空间$\mathbb{R}^n$的正交向量组,则

(1) 勾股定理:$\|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m\|^2=\|\boldsymbol{\alpha}_1\|^2+\|\boldsymbol{\alpha}_2\|^2+\cdots+\|\boldsymbol{\alpha}_m\|^2$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关;

(3) 若$m<n$,则存在$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n$,使得$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}$为正交向量组.

注 线性无关的向量组不一定正交，因此线性无关概念是正交概念的推广.

8. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 Euclid 空间$\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基，则对$\mathbb{R}^n$ 中任一向量 $\boldsymbol{\beta}$，在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标的第 j 个分量为$\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j\rangle$，$j=1,2,\cdots,n$.

9. Gram-Schmidt 正交化方法：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 Euclid 空间$\mathbb{R}^n$ 中线性无关向量组，则由

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\quad \boldsymbol{\beta}_j=\boldsymbol{\alpha}_j-\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\beta}_i\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_i\rangle}\boldsymbol{\beta}_i,\quad j=2,3,\cdots,m;$$

$$\boldsymbol{\gamma}_j=\frac{\boldsymbol{\beta}_j}{\|\boldsymbol{\beta}_j\|},\quad j=1,2,\cdots,m$$

所得的向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_m$ 是标准正交向量组.

九、正交矩阵

1. 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵且满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

2. 正交矩阵具有下列性质：

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，则$|\boldsymbol{A}|=1$ 或-1；

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{A}^*$ 都是正交矩阵；

(3) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶正交矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

3. n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组或行向量组为标准正交向量组.

十、线性空间

1. 设 V 是一个非空集合，在 V 上定义了一种叫做加法的运算：对任何$\alpha,\beta\in V$，有 $\alpha+\beta\in V$；在$\mathbb{F}$ 与 V 的元素之间定义了一种叫做数乘的运算：对任何 $\alpha\in V$ 与任何 $k\in\mathbb{F}$，有 $k\alpha\in V$. 如果这两种运算还满足以下八条运算规律($\alpha,\beta,\gamma\in V,k,l\in\mathbb{F}$)：

(1) 交换律：$\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

(2) 结合律：$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

(3) 存在零元素 $0\in V$，使得对任何 $\alpha\in V$，有 $\alpha+0=\alpha$；

(4) 对任何 $\alpha\in V$，都存在负元素 $\beta\in V$，使得 $\alpha+\beta=0$；

(5) 对任何 $\alpha\in V$，都有 $1\alpha=\alpha$；

(6) 结合律：$k(l\alpha)=(kl)\alpha$；

(7) 分配律：$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$；

(8) 分配律：$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$，

则称 V 是$\mathbb{F}$ 上的线性空间.

若$\mathbb{F}$ 为实(或复)数域，则称 V 为实(或复)线性空间.

线性空间中的零元素是唯一的，任一元素 α 的负元素是唯一的.

2. 闭区间$[a,b]$上所有连续实函数的集合记为 C$[a,b]$，闭区间$[a,b]$上全体实系数多项式的集合记为 P$[a,b]$，$[a,b]$上所有次数不超过 n 的实系数多项式的集合记为 $\mathrm{P}_n[a,b]$. 按照实函数的线性运算，C$[a,b]$，P$[a,b]$和 $\mathrm{P}_n[a,b]$成为$\mathbb{R}$ 上的线性空间.

3. 设 V 是线性空间，W 是 V 的一个非空子集，若 W 关于 V 的线性运算是封闭的，则称 W 是 V 的线性子空间.

4. 在线性空间 V 中，若存在 n 个线性无关的元素 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使得 V 中任何元素都可

[illegible]

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

所以在上式中取 $k_1=1,k_2=\cdots=k_m=0$，可得 $\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$. 同理可得出 $\boldsymbol{\alpha}_2=\cdots=\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$.

问题 4　若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geqslant 2)$ 线性相关，是否它的每个向量都是其余向量的线性组合.

答　否. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geqslant 2)$ 线性相关当且仅当其中至少有一个(并非每个)向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示. 例如，向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

线性相关，虽然 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性表示，但 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示.

问题 5　如何理解一个向量组线性相关(线性无关)的含义？

答　因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geqslant 2)$ 线性相关当且仅当其中至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示，所以向量组线性相关是指其向量之间有线性表示关系，向量组线性无关是指其向量之间无线性表示关系.

线性相关的向量组中含有冗余信息，即有些向量是多余的(这些向量可由其他向量线性表示)，而线性无关的向量组则无冗余信息.

问题 6　列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩和极大线性无关组，与行向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}$ 的秩和极大线性无关组有何关系？

答　因为在考查向量组的线性相关性时，是将其作为列向量组还是行向量组都是可以的，所以这两个向量组的秩相等，并且 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大线性无关组当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_{i_2}^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}^{\mathrm{T}}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}$ 的极大线性无关组.

问题 7　如何理解两个向量组的向量之间有相同的线性相关性、有相同的线性组合关系？

答　设有 m 维向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 n 维向量组(Ⅱ)：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$，$m$ 与 n 不一定相等.

向量组(Ⅰ)与向量组(Ⅱ)的向量之间有相同的线性相关性是指：对于任何的 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant s$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性相关(线性无关)当且仅当向量组 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 线性相关(线性无关).

向量组(Ⅰ)与向量组(Ⅱ)的向量之间有相同的线性组合关系是指：设 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant s$，$1\leqslant j\leqslant s$，则 $\boldsymbol{\alpha}_j=k_1\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+k_2\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 当且仅当 $\boldsymbol{\beta}_j=k_1\boldsymbol{\beta}_{i_1}+k_2\boldsymbol{\beta}_{i_2}+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta}_{i_r}$.

问题 8　如何理解向量组的极大线性无关组和秩？

答　向量组(Ⅰ)的极大线性无关组具有双重属性：极大线性无关组是向量组(Ⅰ)的所有线性无关组中含向量最多者(极大性)，也是所有能线性表示向量组(Ⅰ)的部分组中含向量最少者(极小性). 因此，向量组(Ⅰ)的极大线性无关组是向量组(Ⅰ)中代表最广泛、成员最精干的“有效”部分组.

向量组(Ⅰ)的秩是向量组(Ⅰ)的极大线性无关组中向量的个数，它可以理解为向量组(Ⅰ)中有效向量的个数. 向量组的秩越大，向量组中的有效信息就越多，冗余信息就越少.

问题 9　秩相等的向量组一定等价吗？

答　不一定. 例如，对于向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},$$

则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 和向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 的秩都等于 2；但是 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示，$\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，因此这两个向量组不等价.

问题 10 矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{\alpha}_m]$ 与 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{\beta}_m]$ 等价，同向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 等价有何联系？

答 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 等价，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 同型，且 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$，从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价.

反过来，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 不一定等价，例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，但是它们的列向量组并不等价.

问题 11 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有多少个基础解系？两个不同的基础解系之间有何关系？

答 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，则没有基础解系.

若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则必有基础解系. 把一个基础解系中某些解向量乘非零常数得到的仍是基础解系，而非零常数可以是任意的，所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有无穷多个基础解系. 由于基础解系就是解集的极大线性无关组，而同一个向量组中不同的极大线性无关组是等价的，因此 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个不同基础解系必定等价.

问题 12 下面的命题对吗？

(1) 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解当且仅当导出方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解；

(2) 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解当且仅当导出方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

答 (1) 当非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\boldsymbol{\eta}$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 必只有零解. 否则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\boldsymbol{\xi}$，从而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}\neq\boldsymbol{\eta}$，与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解矛盾.

当方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 可能无解. 例如，方程组

$$\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

无解，但它的导出方程组只有零解.

这说明命题(1)的必要性成立，充分性不成立.

(2) 当非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解时，任取它的两个相异解 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$，得到 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的非零解 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$.

当方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 可能无解. 例如，方程组

$$\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

无解，但它的导出方程组有非零解.

因此，命题(2)的必要性成立，充分性不成立.

问题 13 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为向量空间 V 的一个基，那么 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 也是 V 的一个基吗？如果是，那么它们是相同的基吗？

答 从基的定义可以看出，若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为向量空间 V 的一个基，则 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 也是 V 的一个基.

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是向量空间 V 的两个不同的基,因为基是一个向量组,从而是有序的. 另一方面,为了使得向量空间中向量在同一个基下的坐标唯一,基中的向量必须有序.

问题 14 如何理解齐次线性方程组解空间的维数? 如何理解向量空间的维数?

答 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{F}^{m\times n}$,则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间 $N(\boldsymbol{A})$ 的维数为 $n-\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$,即 $\dim N(\boldsymbol{A})$ 等于齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 经初等变换化为阶梯方程组之后,自由未知量的个数,即等于 $N(\boldsymbol{A})$ 中向量可以自由取值的分量的个数,或者说,$\dim N(\boldsymbol{A})$ 等于 $N(\boldsymbol{A})$ 中向量的自由度.

设 V 为 n 维向量构成的向量空间,$\dim V=r$. 若 $r=n$,则 $V=\mathbb{F}^n$,n 维基本向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 V 的一个基,此时,$\dim V$ 等于 V 中向量可以自由取值的分量的个数 n. 下设 $r<n$,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 为 V 的一个基. 记 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\beta}_r]$,则 $\boldsymbol{B}$ 可经有限次初等行变换化为最简阶梯矩阵,即存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix},\quad 或\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{E}_{n-r}]\boldsymbol{P}$,则 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=n-r$,且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$,从而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,即 $V=N(\boldsymbol{A})$,故 $\dim V$ 等于 V 中向量可以自由取值的分量的个数 r. 因此,$\dim V$ 等于 V 中向量的自由度. 例如,向量空间

$$V=\{(a,b,c,d)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^4\mid a+2b+3c=0,a=4d\}$$

中,向量的自由度为 2,所以 $\dim V=2$.

问题 15 两两正交的非零向量组是正交向量组,那么两两线性无关的向量组是线性无关向量组吗?

答 否. 向量组可能线性无关也可能线性相关. 例如,下面四个向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

中任何两个向量都是线性无关的,但是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

问题 16 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个正交基,那么 $\mathbb{R}^n$ 中与每个 $\boldsymbol{\alpha}_j(j=1,2,\cdots,n)$ 都正交的向量是什么?

答 设 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与每个 $\boldsymbol{\alpha}_j(j=1,2,\cdots,n)$ 都正交,则 $\boldsymbol{\beta}=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{\alpha}_i$,且 $\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j\rangle=0(j=1,2,\cdots,n)$,于是有

$$0=\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_j\rangle=\langle\sum_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j\rangle=\sum_{i=1}^{n}k_i\langle\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j\rangle=k_j\langle\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j\rangle,$$

由 $\langle\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_j\rangle\neq0$ 知 $k_j=0(j=1,2,\cdots,n)$,从而 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$. 这表明 $\mathbb{R}^n$ 中与正交基的每个向量都正交的向量必为零向量.

问题 17 如何理解正交矩阵中"正交"的含义?

答 之所以将满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 的实方阵称为正交矩阵,是因为实方阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵等价于 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组或行向量组为标准正交向量组.

问题 18 如何理解线性空间?

答 线性空间是向量空间的推广,是定义了满足封闭性和八条运算规律的线性运算的非空集合.线性空间中“线性”二字源于其线性运算.线性运算是构建线性空间的方法,它所建成的线性空间具有精致的线性结构;封闭性表明线性空间足够大,足以容纳线性运算所产生的一切元素;八条运算规律则是移植了向量的加法和数乘的运算规律,这是为了保证我们早已习惯的“合并同类项”“移项”等操作在一般的线性运算中依然有效.

问题 19 如何理解线性变换?

答 线性变换是研究线性空间的工具,线性变换的本质是保持线性运算,而线性运算又是线性空间的灵魂,因此,不能保持线性运算的变换就无法充分利用和反映线性空间的关键信息.

给定了 n 维线性空间 V 的一个基,则 V 上的线性变换 T 与 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一一对应的.这样就可以方便地利用具体的矩阵来研究抽象的线性变换.

线性变换 T 在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列就是 $T(\alpha_j)$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标,$j=1,2,\cdots,n$.所以,只要弄清楚 $T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)$ 就知道了 T 的全部信息,或者说,线性变换的所有信息显现于它对基的作用过程中.

问题 20 线性变换能否把非零元素变成零元素?零元素的所有原像能否构成一个子空间?

答 线性变换能够把非零元素变成零元素,例如,零变换把线性空间中任何元素都变成零元素.

设 T 是线性空间 V 上的线性变换,则零元素关于 T 的原像构成的集合

$$W=\{\alpha\in V \mid T(\alpha)=0\}$$

是 V 的非空子集,并且对任意 $\alpha,\beta\in W,k\in\mathbb{F}$,有

$$T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta)=0,\quad T(k\alpha)=kT(\alpha)=0,$$

故 W 是 V 的子空间.

范例精讲

题型 1 数值向量组线性相关性的判定

例 1 判定下列向量组的线性相关性:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,2)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(3,3,7,1)^{\mathrm{T}}$.

解 (1) 方法 1 令 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3]$,则 $|\boldsymbol{A}|=-18\neq0$,从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

方法 2 令 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3]$,对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换化为阶梯矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&-5\\0&0&18\end{bmatrix},$$

由于 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=3$,因此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(2) 令 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \boldsymbol{\beta}_3]$,对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 进行初等行变换化为阶梯矩阵:

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

由于 $\operatorname{rank} \boldsymbol{B}=2<3$,因此向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.

注 在判定数值向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性相关性时,一般对矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_m]$做初等行变换化为阶梯矩阵,求得 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}$. 若 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}=m$,则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关;若 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}<m$,则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为 m 维向量组时,也可考查 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_m]$的行列式,若$|\boldsymbol{A}|\neq 0$,则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关;若$|\boldsymbol{A}|=0$,则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

例 2 设$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{bmatrix}$,其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数,则下列向量组线性相关的是 【 】

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$; (B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$; (C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$; (D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

解 因为

$$|\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\alpha}_4|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}=0,$$

所以,无论 c_1,c_2,c_3,c_4 取何数值,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 都线性相关,所以选(C).

例 3 设有向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,4,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,5,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,4,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(3,1,2,2)^{\mathrm{T}}$和向量 $\boldsymbol{\beta}=(-1,3,2,2)^{\mathrm{T}}$. 试问:

(1) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是否线性无关?

(2) 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示? 若能表示,写出具体表示式.

解 (1) 令 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\alpha}_4]$,因为$|\boldsymbol{A}|=8\neq 0$,所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

(2) 令 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4$,即

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3+3x_4=-1, \\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4=3, \\ 4x_3+2x_4=2, \\ 2x_3+2x_4=2, \end{cases}$$

解得 $x_1=-12,x_2=10,x_3=0,x_4=1$,从而 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示为

$$\boldsymbol{\beta}=-12\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4.$$

例 4 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(1,t_i,t_i^2,\cdots,t_i^{n-1})^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,m)$,其中数 $t_1,t_2,\cdots,t_m$ 互异,讨论向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性相关性.

解 (1) 当 $m>n$ 时,$\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_m]\leqslant n<m$,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

(2) 当 $m=n$ 时,由于 $t_1,t_2,\cdots,t_m$ 互不相同,因此

$$|\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_m| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_m \\ t_1^2 & t_2^2 & \cdots & t_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1^{m-1} & t_2^{m-1} & \cdots & t_m^{m-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}(t_j - t_i) \neq 0,$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

(3) 当 $m<n$ 时,记 $\boldsymbol{\beta}_i=(1,t_i,\cdots,t_i^{m-1})^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,m)$,由(2)知,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性无关. 因为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的降维组,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

题型 2　含参向量组线性相关性的讨论

例 5　设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,4,k)^{\mathrm{T}}$. 问:当 k 为何值时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关?当 k 为何值时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关?

解　方法 1　因为 $|\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3|=3k+9$,所以当 $3k+9=0$,即 $k=-3$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关;当 $k\neq-3$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

方法 2　对矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3]$做初等行变换化为阶梯矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k+3 \end{bmatrix},$$

因此当 $k+3=0$,即 $k=-3$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关;当 $k\neq-3$ 时,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

注　判定含参向量组的线性相关性,也可按照判定数值向量组线性相关性的方法进行.

例 6　已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,5,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,-1,-4,k)^{\mathrm{T}}$ 线性相关,则 $k=$________.

解　方法 1　因为

$$[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & 5 & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & k+27 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,所以 $k=-27$.

方法 2　因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,所以 $\mathrm{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3]<3$,从而矩阵$[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3]$的第一、二、四行构成的三阶子式 $k+27=0$,从而 $k=-27$.

注　方法 2 说明,当向量组所含向量个数不等于其维数时,也可以用行列式来确定参数的值. 请读者自己仔细体会.

题型 3　抽象向量组线性相关性的证明

例 7　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 的任意两个非零矩阵,则　　【　】

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关;

(B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关;

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关;

(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关,$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

解　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times s$ 矩阵,因 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,故 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}+\mathrm{rank}\,\boldsymbol{B}\leqslant n$. 又已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是非零矩阵,则 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}\geqslant1,\mathrm{rank}\,\boldsymbol{B}\geqslant1$,从而 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}<n,\mathrm{rank}\,\boldsymbol{B}<n$,故 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相

关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关，选(A).

例 8 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为三维向量，则对任意常数 k,l，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的 【 】

(A) 必要非充分条件； (B) 充分非必要条件；

(C) 充分必要条件； (D) 既非充分又非必要条件.

解 设 $t_1(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3)+t_2(\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}$，则

$$t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2+(kt_1+lt_2)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，得 $t_1=0,t_2=0,kt_1+lt_2=0$，从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

但是，若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不一定线性无关，例如

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

所以选(A).

例 9 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，但其中任意 $s-1$ 个向量都线性无关. 证明：

(1) 使得等式 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$ 成立的系数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 或者全为零或者全不为零；

(2) 若存在等式 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$ 和 $l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$，且 $l_1\neq0$，则有 $\dfrac{k_1}{l_1}=\dfrac{k_2}{l_2}=\cdots=\dfrac{k_s}{l_s}$.

解 (1) 设 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 中有一个为零，不妨设 $k_1=0$，则 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$. 因 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，故 $k_2=\cdots=k_s=0$. 这表明：若系数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 中有一个为零，则其余系数全为零. 由此即知：若有一个系数不为零，则所有系数全不为零.

(2) 由 $l_1\neq0$ 和(1)知，$l_1,l_2,\cdots,l_s$ 全不为零，且

$$\left(k_1-\frac{k_1}{l_1}l_1\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\left(k_2-\frac{k_1}{l_1}l_2\right)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\left(k_s-\frac{k_1}{l_1}l_s\right)\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0},$$

而 $k_1-\dfrac{k_1}{l_1}l_1=0$，由(1)知

$$k_2-\frac{k_1}{l_1}l_2=0,\quad \cdots,\quad k_s-\frac{k_1}{l_1}l_s=0,$$

即

$$\frac{k_1}{l_1}=\frac{k_2}{l_2}=\cdots=\frac{k_s}{l_s}.$$

例 10 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 n 维向量组，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，且满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证 由题设知 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0},(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_2=-\boldsymbol{\alpha}_1,(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_2$. 令

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

上式两边左乘 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$，得

$$\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0},$$

两边再左乘 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$，得

$$k_3\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0},$$

由$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$得$k_3=0$，分别代入上面两式得$k_2=0,k_1=0$，从而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

注 抽象向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关性的证明首先考虑用定义尝试，一般先假设$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，利用已知条件判断$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$是否成立.

例 11 设向量$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),i=1,2,\cdots,m,m\leqslant n$，满足$|a_{jj}|>\sum\limits_{i\neq j}|a_{ij}|(j=1,2,\cdots,n)$，证明向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

证 反证法 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，则存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$

即

$$[\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\quad \cdots\quad \boldsymbol{\alpha}_m^{\mathrm{T}}]\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{bmatrix}=\mathbf{0},$$

因此

$$a_{1j}k_1+\cdots+a_{jj}k_j+\cdots+a_{mj}k_m=0,\quad j=1,2,\cdots,n.$$

不妨设k_j为$k_1,k_2,\cdots,k_m$中绝对值最大的数，即$|k_j|\geqslant|k_i|(i\neq j)$，从而

$$|a_{jj}||k_j|=|a_{jj}k_j|=\left|\sum_{i\neq j}a_{ij}k_i\right|\leqslant\sum_{i\neq j}|a_{ij}||k_i|\leqslant\sum_{i\neq j}|a_{ij}||k_j|,$$

所以$|a_{jj}|\leqslant\sum\limits_{i\neq j}|a_{ij}|$，矛盾，即$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

注 对于线性相关性的证明问题，当正面论证、推理不易表达时，反证法也是经常采用的方法之一，尤其是在证明线性无关的时候.

题型 4 求向量组的极大线性无关组及秩

例 12 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$为三个线性无关的列向量，则向量组$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$的秩为________.

解 因$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，故矩阵$[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]$可逆. 又$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=2$，则

$$\mathrm{rank}[\boldsymbol{A\alpha}_1\quad\boldsymbol{A\alpha}_2\quad\boldsymbol{A\alpha}_3]=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3])=\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=2.$$

例 13 设

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_4]=\begin{bmatrix}1&1&2&2\\3&2&a&7\\1&0&1&3\\-1&2&1&b\end{bmatrix},$$

求$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}$和向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的一个极大线性无关组.

解 对矩阵$\boldsymbol{A}$做初等行变换，得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&2&2\\3&2&a&7\\1&0&1&3\\-1&2&1&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2&2\\0&-1&-1&1\\0&0&a-5&0\\0&0&0&b+5\end{bmatrix},$$

(1) 当 $a=5,b=-5$ 时,$\text{rank}\,\boldsymbol{A}=2$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是一个极大线性无关组;

(2) 当 $a=5,b\neq-5$ 时,$\text{rank}\,\boldsymbol{A}=3$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是一个极大线性无关组;

(3) 当 $a\neq5,b=-5$ 时,$\text{rank}\,\boldsymbol{A}=3$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是一个极大线性无关组;

(4) 当 $a\neq5,b\neq-5$ 时,$\text{rank}\,\boldsymbol{A}=4$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是一个极大线性无关组.

例 14 求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\-2\\-3\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}0\\2\\4\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{bmatrix}3\\4\\5\\8\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_6=\begin{bmatrix}-1\\-2\\-3\\2\end{bmatrix}$$

的秩,以及该向量组的极大线性无关组,并将其余向量用极大线性无关组来线性表示.

解 令矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_4\quad\boldsymbol{\alpha}_5\quad\boldsymbol{\alpha}_6]$,对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换化为阶梯矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&0&3&-1\\2&-2&-1&2&4&-2\\3&-3&-1&4&5&-3\\1&-1&1&1&8&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1&0&3&-1\\0&0&1&2&-2&0\\0&0&0&-3&9&3\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{B},$$

所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5,\boldsymbol{\alpha}_6$ 的秩为 3,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是它的极大线性无关组.

再对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 做初等行变换化为最简阶梯矩阵:

$$\boldsymbol{B}\to\begin{bmatrix}1&-1&0&0&7&1\\0&0&1&0&4&2\\0&0&0&1&-3&-1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{\alpha}_2=-\boldsymbol{\alpha}_1,\quad \boldsymbol{\alpha}_5=7\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_3-3\boldsymbol{\alpha}_4,\quad \boldsymbol{\alpha}_6=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4.$$

注 用初等行变换求列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩与极大线性无关组以及将其余向量用极大线性无关组来线性表示的方法:

(a) 对矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_s]$ 做初等行变换化为阶梯矩阵 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\beta}_s]$,则 $\boldsymbol{B}$ 的非零行数 r 就是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩 r;

(b) $\boldsymbol{B}$ 的 r 个非零行中第一个非零元所在的列向量 $\boldsymbol{\beta}_{i_1},\boldsymbol{\beta}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{i_r}$ 就是向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的一个极大线性无关组,从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组;

(c) 再对 $\boldsymbol{B}$ 做初等行变换得到最简阶梯矩阵 $\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{\gamma}_1\quad\boldsymbol{\gamma}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\gamma}_s]$,则 $\boldsymbol{C}$ 的 r 个非零行中第一个非零元所在的列向量 $\boldsymbol{\gamma}_{i_1},\boldsymbol{\gamma}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{i_r}$ 均为基本向量,它们是向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s$ 的一个极大线性无关组,而 $\boldsymbol{C}$ 中其他任何列向量 $\boldsymbol{\gamma}_j$ 都可以很容易地表示为 $\boldsymbol{\gamma}_{i_1},\boldsymbol{\gamma}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\gamma}_{i_r}$ 的线性组合

$$\boldsymbol{\gamma}_j=k_{j_1}\boldsymbol{\gamma}_{i_1}+k_{j_2}\boldsymbol{\gamma}_{i_2}+\cdots+k_{j_r}\boldsymbol{\gamma}_{i_r},$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 可以由极大线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性表示为

$$\boldsymbol{\alpha}_j=k_{j_1}\boldsymbol{\alpha}_{i_1}+k_{j_2}\boldsymbol{\alpha}_{i_2}+\cdots+k_{j_r}\boldsymbol{\alpha}_{i_r}.$$

题型 5 两个向量组线性表示与等价的证明

例 15 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,则 【 】

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关；

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关；

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关；

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

解 四个选项中各向量组用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示的表示系数矩阵依次为

$$\boldsymbol{K}_1=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{K}_2=\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{K}_3=\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{K}_4=\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}.$$

因 $|\boldsymbol{K}_1|=|\boldsymbol{K}_2|=|\boldsymbol{K}_3|=0,|\boldsymbol{K}_4|=2\neq0$，故选(D).

例 16 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则 【 】

(A) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价；

(B) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价；

(C) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价；

(D) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

解 将矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 按列分块，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 知矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组可由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量表示. 因 $\boldsymbol{B}$ 可逆，故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{CB}^{-1}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组可由矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量表示，从而矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价. 所以选(B).

例 17 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+6\boldsymbol{\alpha}_3$，试判别向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的线性相关性.

解 由题设知

$$[\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&4&2\\-1&-4&6\end{bmatrix},$$

因为上式中表示系数矩阵的行列式为零，所以 $\mathrm{rank}[\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3]<3$，即向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.

例 18 设

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n,\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n,\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{n-1},$$

证明当 $n\geqslant2$ 时向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 有相同的秩.

证 由题设知

$$[\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\beta}_n]=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix}0&1&\cdots&1\\1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&0\end{bmatrix},$$

记上式中表示系数矩阵为 $\boldsymbol{K}$，则 $|\boldsymbol{K}|=(-1)^{n-1}(n-1)\neq0$，故 $\boldsymbol{K}$ 可逆，因此

$$[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{\alpha}_n]=[\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{\beta}_n]\boldsymbol{K}^{-1},$$

即这两个向量组等价,从而它们的秩相同.

例 19 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(1) 求 a 的值;

(2) 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解 (1) 因为四个三维向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_i$ 线性相关($i=1,2,3$),所以若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关,则 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3)$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示,与题设矛盾. 于是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关,从而 $|\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \boldsymbol{\beta}_3|=a-5=0$,于是 $a=5$.

(2) 因为

$$[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \boldsymbol{\beta}_3]=\begin{bmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{bmatrix},$$

从而

$$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+10\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3.$$

注 本题(1)小题也可以对矩阵$[\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \boldsymbol{\beta}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3]$做初等行变换化为阶梯矩阵,以 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \boldsymbol{\beta}_3]<\operatorname{rank}[\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \boldsymbol{\beta}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3]$来确定 a 的取值,但计算量较大.

例 20 设有两个向量组

(Ⅰ): $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,4,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,a-3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,8,b-1)^{\mathrm{T}}$;

(Ⅱ): $\boldsymbol{\beta}_1=(2,b+5,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(3,7,a-4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(1,2b+4,-1)^{\mathrm{T}}$.

问:(1) 当 a,b 为何值时,向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)的秩相等且等价?

(2) 当 a,b 为何值时,向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)的秩相等但不等价?

证 对矩阵$[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \boldsymbol{\beta}_3]$做初等行变换,得

$$[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \boldsymbol{\beta}_3]=\begin{bmatrix}2&-1&2&2&3&1\\4&a-3&8&b+5&7&2b+4\\-2&1&b-1&-2&a-4&-1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}2&-1&2&2&3&1\\0&a-1&4&b+1&1&2b+2\\0&0&b+1&0&a-1&0\end{bmatrix}.$$

当 $a\neq1,b\neq-1$ 时,$\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3]=\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \boldsymbol{\beta}_3]=3$,且

$$|\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \boldsymbol{\beta}_3|=-3(a-1)(b+1)\neq0,$$

即 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \boldsymbol{\beta}_3]=3$,从而向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)的秩相等且等价.

当 $a=1,b=-1$ 时,$\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3]=\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \boldsymbol{\beta}_3]=2$,且 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \boldsymbol{\beta}_3]=2$,从而向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)的秩相等且等价.

当 $a=1,b\neq-1$,或者 $a\neq1,b=-1$ 时,$\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3]=\operatorname{rank}[\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \boldsymbol{\beta}_3]=2$,$\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \boldsymbol{\beta}_3]=3$,从而向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)的秩相等但不等价.

注 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 是两个 n 维向量组,则它们等价的充要条件是 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{\alpha}_s]=\operatorname{rank}[\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{\beta}_t]=\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{\alpha}_s\quad \boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{\beta}_t]$.

题型6 线性方程组解的结构

例21 设$A=[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\alpha}_4]$为四阶矩阵,$A^*$为$A$的伴随矩阵,若$(1,0,1,0)^T$是方程组$Ax=0$的一个基础解系,则方程组$A^*x=0$的基础解系为 【 】

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$; (B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$; (C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$; (D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

解 因为$(1,0,1,0)^T$是$Ax=0$的一个基础解系,所以$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$,且$\text{rank}A=3$,从而$\text{rank}A^*=1$,则$A^*x=0$的解空间的维数是3,而$A^*A=|A|E=0$,且$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关,因此选(D).

例22 设向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是方程组$Ax=0$的一个基础解系,令$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3$,证明向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$是方程组$Ax=0$的基础解系.

证 由题设知,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$都是方程组$Ax=0$的解,且

$$[\boldsymbol{\beta}_1 \quad \boldsymbol{\beta}_2 \quad \boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 2\\ 1 & -1 & -3\end{bmatrix},$$

易知上式中表示系数矩阵可逆.而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,故$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关.

因为方程组$Ax=0$的基础解系含有三个线性无关的解向量,所以$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$是方程组$Ax=0$的基础解系.

注 证明一个向量组是齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系需要满足三个条件:

(1) 该向量组中每个向量都是方程组$Ax=0$的解;

(2) 该向量组线性无关;

(3) 该向量组的向量个数为$n-\text{rank}\,A$.

例23 设$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & t & t\\ 1 & t & 0 & 1\end{bmatrix}$,且齐次方程组$Ax=0$的基础解系中含有两个解向量,求$Ax=0$的通解.

解 因为$n=4$,$n-\text{rank}\,A=2$,所以$\text{rank}\,A=2$,对A做初等行变换,得

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & t & t\\ 1 & t & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1-2t & 2-2t\\ 0 & 1 & t & t\\ 0 & 0 & -(1-t)^2 & -(1-t)^2\end{bmatrix},$$

要使$\text{rank}\,A=2$,则必有$t=1$,此时与$Ax=0$同解的方程组为

$$\begin{cases}x_1=x_3,\\ x_2=-x_3-x_4,\end{cases}$$

得基础解系$\boldsymbol{\xi}_1=(1,-1,1,0)^T$,$\boldsymbol{\xi}_2=(0,-1,0,1)^T$,故方程组的通解为

$$x=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2,\quad k_1,k_2\text{ 为任意数}.$$

例24 设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,0,1)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,0)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,7,1)^T$是方程组

$$\begin{cases}a_1x_1+x_2+a_3x_3+x_4=b_1,\\ 3x_1+a_2x_2+x_3+a_4x_4=b_2,\\ x_1+4x_2-3x_3+5x_4=-2\end{cases}$$

的解,求该方程组的通解,并写出该方程组.

解 方程组的系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}a_1 & 1 & a_3 & 1\\ 3 & a_2 & 1 & a_4\\ 1 & 4 & -3 & 5\end{bmatrix},$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 中存在非零二阶子式,因此 rank $\boldsymbol{A}\geqslant 2$. 又

$$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-2,-1,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-5,-7,0)^{\mathrm{T}}$$

是已知方程组的导出方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个线性无关的解,故 $4-\text{rank}\,\boldsymbol{A}\geqslant 2$,即 rank $\boldsymbol{A}\leqslant 2$,于是 rank $\boldsymbol{A}=2$,$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,从而所给方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_1+k_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)$$

$$=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}0\\-2\\-1\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\-5\\-7\\0\end{bmatrix},\quad k_1,k_2\text{ 为任意数.}$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 代入齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$,有

$$\begin{cases}-1-a_3=0,\\-2a_2-1+a_4=0,\\-a_1-5-7a_3=0,\\-10-5a_2=0,\end{cases}$$

得 $a_1=2,a_2=-2,a_3=-1,a_4=-3$;再将 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,0,1)^{\mathrm{T}}$ 代入原方程组,得 $b_1=1,b_2=4$,从而原方程组为

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1,\\3x_1-2x_2+x_3-3x_4=4,\\x_1+4x_2-3x_3+5x_4=-2.\end{cases}$$

注 当方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩已知或基础解系的解向量的个数已知时,齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任何 $n-\text{rank}\,\boldsymbol{A}$ 个线性无关的解向量都构成其基础解系.

例 25 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}$ 都为四维列向量,矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_4]$,并且方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $(-1,1,0,2)^{\mathrm{T}}+k(1,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$.

(1) 问向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示?

(2) 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}$ 的一个极大线性无关组.

解 (1) 假如 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,则有

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4,$$

即 $(k_1,k_2,k_3,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的解,因此

$$(k_1,k_2,k_3,0)^{\mathrm{T}}-(-1,1,0,2)^{\mathrm{T}}=(k_1+1,k_2-1,k_3,-2)^{\mathrm{T}}$$

是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,从而它可由 $(1,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$ 线性表示,但向量组 $(k_1+1,k_2-1,k_3,-2)^{\mathrm{T}},(1,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$ 线性无关,矛盾,所以 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(2) 因为 $(1,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示. 而 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示,所以 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示. 又向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}$ 的秩为 3,于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}$ 的一个极大线性无关组.

例 26 已知 rank $\boldsymbol{A}_{m\times n}=r$,$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的导出方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,$\boldsymbol{\eta}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解. 证明:

(1) 向量组 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关;

(2) $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的线性无关的解;

(3) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任意 $n-r+2$ 个解线性相关;

(4) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任意一个解可写成 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 的形式，其中 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的线性无关的解，$k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$.

证 (1) 由题设知 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，故 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关. 假如 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\eta}$ 可由 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表示，不妨设

$$\boldsymbol{\eta}=c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

于是

$$\boldsymbol{A\eta}=c_1\boldsymbol{A\xi}_1+c_2\boldsymbol{A\xi}_2+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{A\xi}_{n-r}=\boldsymbol{0},$$

与 $\boldsymbol{\eta}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解矛盾，因此向量组 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关.

(2) 因为 $\boldsymbol{\eta}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，从而 $\boldsymbol{\eta}$，$\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

设存在常数 $k,k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$，使得

$$k\boldsymbol{\eta}+k_1(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\eta})+k_2(\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta})+\cdots+k_{n-r}(\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{0},$$

即

$$(k+k_1+k_2+\cdots+k_{n-r})\boldsymbol{\eta}+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}=\boldsymbol{0},$$

由 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性无关，可得

$$k+k_1+k_2+\cdots+k_{n-r}=0,\quad k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0,$$

故 $k=k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，因此 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}$ 线性无关.

(3) 由于方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}$，因此 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任一解都可由向量组 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表示，于是它的任意 $n-r+2$ 个解都线性相关.

(4) 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r},\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 $n-r+1$ 个线性无关的解，由(3)知 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任意 $n-r+2$ 个解线性相关，故对 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的任一解 $\boldsymbol{x}$，有 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r},\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 线性相关，从而 $\boldsymbol{x}$ 可由 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r},\boldsymbol{\eta}_{n-r+1}$ 唯一线性表示，即存在 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r},k_{n-r+1}$，使得

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1},$$

两边同时乘以 $\boldsymbol{A}$，得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{Ax}&=\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}+k_{n-r+1}\boldsymbol{\eta}_{n-r+1})\\&=k_1\boldsymbol{A\eta}_1+k_2\boldsymbol{A\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{A\eta}_{n-r}+k_{n-r+1}\boldsymbol{A\eta}_{n-r+1}\\&=(k_1+k_2+\cdots+k_{n-r}+k_{n-r+1})\boldsymbol{b},\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，知 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r}+k_{n-r+1}=1$.

注 由本题可知：非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 解的结构是存在 $n-r+1$ 个线性无关的解，其任意 $n-r+2$ 个解都线性相关，因此有时也把非齐次方程组的 $n-r+1$ 个线性无关的解称为其基础解系，所不同的是它的线性组合只有当组合系数之和为 1 时，才是非齐次方程组的解. 这也说明非齐次方程组的解不能构成向量空间.

题型 7　两个线性方程组解的关系

例 27　设有齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵.

① 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\geqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$；

② 若 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\geqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解；

③ 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，则 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$；

④ 若 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解.

以上命题正确的是　　　　【　】

(A) ①②；　(B) ①③；　(C) ②④；　(D) ③④.

解 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，则 $n-\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n-\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$，从而 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$，即命题③成立，排除(A)和(C).

若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的子空间，故 $n-\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\leqslant n-\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$，从而 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\geqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$，命题①成立，故选(B).

例 28 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解的充要条件是

(A) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价；　(B) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 同解；

(C) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价；　(D) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

解 可用反例通过排除法得到正确选项.

对于(A)，相当于 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$，显然只是必要而非充分条件；

对于(B)，例如 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，显然 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，但 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 并不同解；

对于(D)，考虑 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，显然 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价，但 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 不同解，排除(D)，故应选(C).

事实上，对于(C)，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解的充要条件是下面三个方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0},\quad \begin{cases}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}\end{cases}$$

同解，这等同于 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$，这又等价于 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

例 29 设有线性方程组

$$(\mathrm{I}):\begin{cases}x_1+x_2=0,\\ x_2-x_4=0,\end{cases}\qquad (\mathrm{II}):\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\ x_2-x_3+x_4=0.\end{cases}$$

(1) 分别求方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)的基础解系；

(2) 求方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)的公共解.

解 (1) 分别记方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{bmatrix},$$

分别对矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 做初等行变换，不难得到方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)的基础解系依次为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(0,0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\xi}_2=(-1,1,0,1)^{\mathrm{T}};$$
$$\boldsymbol{\eta}_1=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2=(-1,-1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

(2) 联立(Ⅰ)、(Ⅱ)得方程组 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，对系数矩阵做初等行变换，得到方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)的公共解为 $k(-1,1,2,1)^{\mathrm{T}}$，k 为任意数.

注 求两个线性方程组的公共解有三种方法：

(1) 将两个线性方程组联立求解；

(2) 先求出一个方程组的通解，再代入另一个方程组中，确定通解中参数的关系；

(3) 先分别求出两个方程组的通解,令两个通解表达式相等,确定参数的关系.

例 30 已知齐次方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2 \quad\quad +x_4=0, \\ ax_1 \quad +a^2x_3 \quad =0, \\ \quad ax_2 \quad +a^2x_4=0 \end{cases}$$

的任何解都满足方程 $x_1+x_2+x_3=0$,求 a 的值和齐次方程组的通解.

解 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & a & 0 & a^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=(1,1,1,0), \quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix},$$

则齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Cx}=\boldsymbol{0}$ 同解. 事实上,若 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,则由题设知,$\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解,从而 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{Cx}=\boldsymbol{0}$ 的解;反之,$\boldsymbol{Cx}=\boldsymbol{0}$ 的解显然也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

由上知,rank $\boldsymbol{A}$=rank $\boldsymbol{C}$. 对矩阵 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{C}$ 都做初等行变换,得

$$\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 & a^2-a \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2-a \end{bmatrix},$$

因此,若 $a=0$,则 rank $\boldsymbol{A}=1\neq$ rank $\boldsymbol{C}=2$,不合题意. 所以 $a\neq 0$. 此时

$$\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & a-1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-1 \end{bmatrix},$$

即知 rank $\boldsymbol{A}$=rank $\boldsymbol{C}=3$ 的充要条件是 $a=\dfrac{1}{2}$.

把 $a=\dfrac{1}{2}$ 代入方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$,易得其基础解系 $\boldsymbol{\xi}=\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1,1\right)^{\mathrm{T}}$,从而通解为 $\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi}$,$k$ 为任意数.

例 31 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -6 & 2 & 10 \\ -4 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & a-2 \end{bmatrix}$ 是齐次方程组(Ⅰ)的系数矩阵,$\boldsymbol{\beta}=(b,c,1)^{\mathrm{T}}$ 是齐次方程组(Ⅱ)的基础解系,且方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)同解.

(1) 求 a,b,c 的值;

(2) 求非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解 (1) 因为 $\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$,且方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)同解,所以齐次方程组(Ⅰ)有非零解 $\boldsymbol{\beta}$,从而 $|\boldsymbol{A}|=2(a-7)=0$,故 $a=7$. 将 $a=7$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 代入到方程组(Ⅰ),有

$$\begin{cases} -6b+2c+10=0, \\ -4b+c+7=0, \\ -3b+c+5=0, \end{cases}$$

得 $b=2,c=1$.

(2) 对增广矩阵$[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta}]$做初等行变换,得

$$[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta}]=\begin{bmatrix}-6&2&10&2\\-4&1&7&1\\-3&1&5&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-2&0\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

求得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 得通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\quad k\text{ 为任意数}.$$

题型 8 向量空间的基、维数与过渡矩阵的计算

例 32 设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,6)^{\mathrm{T}}$,求$\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$的一个基,并将这个基扩充为$\mathbb{R}^4$的一个基.

解 求 $\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$的基就是求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的极大线性无关组. 因此,对矩阵$[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]$做初等行变换化为阶梯矩阵:

$$[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&0&1\\0&2&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

即知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大线性无关组,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$的一个基.

因为$\mathbb{R}^4$是四维向量空间,所以只需找 $\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5\in\mathbb{R}^4$使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关. 为此可分别取 $\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 为四维基本向量 $\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$,容易验证向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 线性无关,即为$\mathbb{R}^4$的一个基.

注 (1) 将$\mathbb{F}^n$中向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m<n)$扩充为$\mathbb{F}^n$的一个基的一般方法是:对矩阵$[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_m\quad\boldsymbol{e}_1\quad\boldsymbol{e}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{e}_n]$做初等行变换化为阶梯矩阵(其中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是$\mathbb{F}^n$的自然基),则阶梯矩阵中前 n 个线性无关的列就构成了$\mathbb{F}^n$的一个基.

(2) $\mathbb{F}^n$中任何线性无关的向量组都可以扩充为$\mathbb{F}^n$的一个基.

例 33 设向量空间 V 的两个基为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\1\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\-3\\0\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix},$$

已知向量$\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为$(1,2,3)^{\mathrm{T}}$,求$\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$下的坐标.

解 由于$[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3]\boldsymbol{X}$的解便是由基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$到基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{C}$,因此对增广矩阵$[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]$做初等行变换,得

$$[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}1&2&0&1&1&1\\0&1&1&-1&0&0\\-2&-3&-1&0&-1&0\\1&0&0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&-1\\0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\\0&0&1&-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&-1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

故由基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0&0&-1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\\-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&-1\end{bmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{\alpha}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3]\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},$$

故

$$\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\\frac{9}{2}\\-\frac{11}{2}\end{bmatrix}$$

即为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

例 34 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个基，$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个基；

(2) 讨论当 k 为何值时，存在非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标相同，并求出所有的 $\boldsymbol{\xi}$.

解 (1) 因为

$$[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{bmatrix},$$

且

$$\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&1\\2k&k+1\end{vmatrix}=4\neq0,$$

所以向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个基.

(2) 由题意知，存在不全为零的数 x_1,x_2,x_3，使得

$$\boldsymbol{\xi}=x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3,$$

即

$$x_1(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\alpha}_1)+x_2(\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\alpha}_2)+x_3(\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}.$$

将$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+(k+1)\boldsymbol{\alpha}_3$ 代入上式,得线性方程组

$$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3)+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3(\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}.$$

由于该方程组有非零解,因此系数行列式$|\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_3|=0$,即

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k \end{vmatrix}=0,$$

解得 $k=0$. 于是上述方程组化为

$$(x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0},$$

由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关即知

$$\begin{cases} x_1+x_3=0, \\ x_2=0. \end{cases}$$

解得 $x_1=l,x_2=0,x_3=-l$,从而$\boldsymbol{\xi}=l(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)$,$l$ 为任意非零数.

题型9 内积空间及正交矩阵的计算与证明

例35 已知$\mathbb{R}^4$中向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1,1)^{\mathrm{T}}$. 求:

(1) $\|\boldsymbol{\alpha}_1\|$ 和$\langle\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3\rangle$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 的夹角;

(3) 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都正交的全部向量.

解 (1) $\|\boldsymbol{\alpha}_1\|=\sqrt{\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1\rangle}=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}$;

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3\rangle&=2\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1\rangle+\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3\rangle+4\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1\rangle+2\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\rangle\\&=2\times2+(-2)+4\times2+2\times(-3)=4.\end{aligned}$$

(2) 记 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 的夹角为 θ,则

$$\cos\theta=\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\rangle}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|\,\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \text{即} \quad \theta=\frac{5\pi}{6}.$$

(3) 设与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都正交的向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$,则

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0,\quad \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0,\quad \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0,$$

即

$$\begin{cases} x_1-x_3=0, \\ x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ -x_1+x_3+x_4=0. \end{cases}$$

求得上述方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$,于是与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都正交的全部向量为 $k\boldsymbol{\alpha}_4=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$,$k$ 为任意数.

例36 设 $\boldsymbol{B}$ 是秩为 2 的 5×4 矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,4,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(5,-1,-8,9)^{\mathrm{T}}$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解向量,求 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解空间的一个标准正交基.

解 齐次方程组 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解空间的维数 $n-\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=2$,又$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,4,-1)^{\mathrm{T}}$ 线性无关,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解空间的基. 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 标准正交化,令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{3}(-4,2,10,-6)^{\mathrm{T}},$$

将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 单位化,得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{15}}(1,1,2,3)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{39}}(-2,1,5,-3)^{\mathrm{T}},$$

因此 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 是 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解空间的一个标准正交基.

注 已知齐次方程组 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的三个解向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$,并不意味着它的解空间是三维的,这里是先找出解空间的一个基础解系,然后再标准正交化.当然,也可以直接将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交化,此时会出现 $\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}$,即知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,再将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 单位化,得到 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$.

例 37 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中线性无关的向量组,且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 中每个向量都与向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2$ 正交,证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

证 方法 1 由于 $n+1$ 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关,即存在一组不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-1},l_1,l_2$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0},$$

又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关,因此 l_1,l_2 必不全为零.

对上式两边分别与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 作内积,得

$$k_1\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle+k_2\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\rangle+\cdots+k_{n-1}\langle\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}_1\rangle+l_1\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle+l_2\langle\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1\rangle=0,$$
$$k_1\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2\rangle+k_2\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2\rangle+\cdots+k_{n-1}\langle\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}_2\rangle+l_1\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\rangle+l_2\langle\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2\rangle=0,$$

由题设知

$$l_1\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle+l_2\langle\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1\rangle=0,\quad l_1\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\rangle+l_2\langle\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2\rangle=0,$$

即

$$\langle l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1\rangle=0,\quad \langle l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2\rangle=0,$$

从而

$$l_1\langle l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1\rangle=0,\quad l_2\langle l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2\rangle=0,$$

故

$$\langle l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2,l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2\rangle=0,$$

由此得 $l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$.而 l_1,l_2 不全为零,所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

方法 2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_{n-1}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 是 $(n-1)\times n$ 矩阵.由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关,知 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n-1$,所以 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解空间的维数为 1.

因向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2$ 都正交,故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解,于是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 必线性相关.

注 方法 1 是利用向量内积按定义证明线性相关,方法 2 是利用线性方程组解空间的维数证明线性相关.两种方法的简繁是显而易见的.

例 38 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为正交矩阵,证明 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{-1},\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 及 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\\&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$ 都是正交矩阵.

证 由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为正交矩阵,知 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$,于是

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},$$
$$\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{E},$$
$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E},$$

$$\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} & \\ & B^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^{\mathrm{T}} & \\ & BB^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & \\ & E \end{bmatrix}.$$

从而 $A^{\mathrm{T}}, B^{-1}, A^{-1}B^{\mathrm{T}}$ 及 $\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}$ 都是正交矩阵.

题型 10 线性空间与线性变换

例 39 设有 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间 $W=\{A \mid A\in\mathbb{R}^{2\times 2}, A^{\mathrm{T}}=-A\}$，则 W 的维数是 【 】

(A) 1； (B) 2； (C) 3； (D) 4.

解 因为 $A^{\mathrm{T}}=-A$，所以 $A=\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$，从而 W 的维数是 1，故选(A).

例 40 设 X 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的全体实函数构成的线性空间，计算下列集合所生成的子空间的基和维数：

(1) $\{1, \mathrm{e}^{ax}, x\mathrm{e}^{bx}\}(a\neq b)$；

(2) $\{1, \cos 2x, \sin^2 x\}$.

解 (1) 当 $a\neq 0$ 时，$1, \mathrm{e}^{ax}, x\mathrm{e}^{bx}$ 线性无关，从而它是 $\mathrm{span}(1, \mathrm{e}^{ax}, x\mathrm{e}^{bx})$ 的一个基，因此 $\mathrm{span}(1, \mathrm{e}^{ax}, x\mathrm{e}^{bx})$ 的维数为 3. 当 $a=0$ 时，$\{1, x\mathrm{e}^{bx}\}$ 为 $\mathrm{span}(1, \mathrm{e}^{ax}, x\mathrm{e}^{bx})$ 的一个基，$\mathrm{span}(1, \mathrm{e}^{ax}, x\mathrm{e}^{bx})$ 的维数为 2.

(2) 因 $1=\cos 2x+2\sin^2 x$，且 $\cos 2x$ ，$2\sin^2 x$ 线性无关，故 $\cos 2x, \sin^2 x$ 为 $\mathrm{span}(1, \cos 2x, \sin^2 x)$ 的一个基，其维数为 2.

例 41 设 T 是三维线性空间 X 上的线性变换，它关于基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的矩阵是

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

令 $\beta_1=\alpha_1, \beta_2=\alpha_1+\alpha_2, \beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，证明 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是线性空间 X 的一个基，并求 T 关于基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的矩阵.

证 注意到

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

且上式右端矩阵可逆，因此 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 为线性空间 X 的基. 于是

$$\begin{aligned} T(\beta_1, \beta_2, \beta_3) &= T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (\beta_1, \beta_2, \beta_3)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (\beta_1, \beta_2, \beta_3)\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -3 & -4 & -6 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

因此 T 关于基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -3 & -4 & -6 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

同步练习

1. 填空题

(1) 已知向量组$(1,3,1)^T,(3,5,1)^T,(t,2,3)^T$线性相关，则$t=$________.

(2) 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,a)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,b)^T$可线性表示任何一个三维列向量，则$a,b$满足条件________.

(3) 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(a,0,c),\boldsymbol{\alpha}_2=(b,c,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,a,b)$线性无关，则$a,b,c$必满足关系式________.

(4) 若向量$\boldsymbol{\beta}=(1,k,5)^T$不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-3,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,1)^T$线性表示，则$k$必满足条件________.

(5) 设$\|\boldsymbol{\alpha}\|=2,\|\boldsymbol{\beta}\|=3,|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{19}$，则$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$之间的夹角$\theta=$________.

(6) 设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,a)^T$，若由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$生成的向量空间的维数是2，则$a=$________.

(7) 所有n阶反对称矩阵构成的线性空间的维数是________.

(8) 设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0)$为$\mathbb{R}^3$的一组基，$T$为$\mathbb{R}^3$的线性变换，且$T(\boldsymbol{\alpha}_1)=(1,2,3),T(\boldsymbol{\alpha}_2)=(0,1,2),T(\boldsymbol{\alpha}_3)=(0,0,1)$，则$T$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的矩阵为________.

(9) 设三阶非零矩阵$\boldsymbol{B}$的每一个列向量都是方程组$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0,\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0,\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$的解，则$\lambda=$________.

(10) 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，且满足$\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$，则方程组$\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$的解为________.

2. 单选题

(1) 设$\boldsymbol{A}$为正交矩阵，则下列结论必成立的是 【 】

(A) $|\boldsymbol{A}|=1$； (B) $|\boldsymbol{A}|=-1$；

(C) $\boldsymbol{A}$为对称矩阵； (D) $\boldsymbol{A}^T$与$\boldsymbol{A}$可交换.

(2) 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的秩为$r$，则下列结论不成立的是 【 】

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中任意$r$个向量都线性无关；

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中任意$r$个线性无关的向量组与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$等价；

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中至少有一个含$r$个向量的向量组线性无关；

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中任意$r+1$个向量均线性相关.

(3) 设 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关,$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则 【 】

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关; (B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(C) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示; (D) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(4) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是$\mathbb{R}^3$的一组基,则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为 【 】

(A) $\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{bmatrix}$; (B) $\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{bmatrix}$;

(C) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$; (D) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$.

(5) 设向量组(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组(Ⅱ):$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性表示,则 【 】

(A) 当 $s<t$ 时,向量组(Ⅰ)必线性相关;

(B) 当 $s>t$ 时,向量组(Ⅰ)必线性相关;

(C) 当 $s<t$ 时,向量组(Ⅱ)必线性相关;

(D) 当 $s<t$ 时,向量组(Ⅱ)必线性相关.

(6) 已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$是非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是其导出方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,k_1,k_2 为任意常数,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 【 】

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$; (B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$;

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$; (D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,rank $\boldsymbol{A}=n-3$,且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的三个线性无关的解向量,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 【 】

(A) $\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$; (B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$;

(C) $2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$; (D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_3$.

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times s$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $s\times n$ 矩阵,则 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 为同解方程组的充分条件是 【 】

(A) rank $\boldsymbol{A}=m$; (B) rank $\boldsymbol{A}=s$;

(C) rank $\boldsymbol{B}=s$; (D) rank $\boldsymbol{B}=n$.

(9) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n(n>2)$阶矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|=0$,则齐次方程组$(\boldsymbol{A}^*)^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 【 】

(A) 只有零解;

(B) 有非零解,其基础解系含有 1 个解向量;

(C) 有非零解,其基础解系含有 n 个解向量;

(D) 有非零解,其基础解系所含解向量的个数与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩有关.

(10) 设 $\boldsymbol{\eta}_1=(1,a,1,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=(1,2,1,-a)^{\mathrm{T}}$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,$\boldsymbol{\eta}_3=$

$(1,0,b,0)^{\mathrm{T}}$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，则 【 】

(A) $a=-2,b=1$； (B) $a=2,b=-1$；

(C) $a=-2,b=0$； (D) $a=2,b=0$.

3. 判断下列向量组是否线性相关？

(1) $\begin{bmatrix}3\\-4\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\-2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$； (2) $\begin{bmatrix}2\\1\\-3\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\-1\\2\end{bmatrix}$.

4. 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,5,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(3,-2,3,-4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,1,3)^{\mathrm{T}}$ 的秩与它的一个极大线性无关组，并将其余的向量由该极大线性无关组表示.

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1-\lambda,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1-\lambda,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,6-\lambda)^{\mathrm{T}}$.

(1) 问 λ 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关？

(2) 问 λ 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关？

6. 设 n 维向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 能由 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，即存在矩阵 $\boldsymbol{K}=[k_{ij}]_{m\times m}$，使得 $[\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\beta}_m]=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_m]\boldsymbol{K}$. 证明：

(1) 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关推出 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{K}$ 可逆；

(2) 若 $\boldsymbol{K}$ 可逆，则由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关可推出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关；

(3) 若 $m=n$，则由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关可推出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{bmatrix},\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix}$.

(1) 求满足 $\boldsymbol{A}\xi_2=\boldsymbol{\xi}_1$ 和 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$；

(2) 对(1)中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$，证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

8. 若向量 $\boldsymbol{\beta}=(0,k,k^2)^{\mathrm{T}}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1+k,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1+k,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1+k)^{\mathrm{T}}$ 唯一线性表示，求 k 的值.

9. 设在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中，$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$，并且每一个 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 都不能由前面的 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

10. 证明 n 阶非零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1 的充要条件是存在 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

11. 设有两个向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,2)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,6)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,10)^{\mathrm{T}};$$
$$\boldsymbol{\beta}_1=(2,1,6)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2=(0,-2,-4)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_3=(4,4,16)^{\mathrm{T}},$$

问它们是否等价？

12. 设有两个向量组

(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2)^{\mathrm{T}}$；

(Ⅱ)：$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,a+3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(2,1,a+6)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=(2,2,a+2)^{\mathrm{T}}$.

(1) 当 a 为何值时，(Ⅰ)与(Ⅱ)等价？当 a 为何值时，(Ⅰ)与(Ⅱ)不等价？

(2) 当 a 为何值时，(Ⅰ)能被(Ⅱ)线性表示，但(Ⅱ)不能被(Ⅰ)线性表示？

13. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,b,3b)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(4,3,9)^{\mathrm{T}}$，讨论 a,b 取何值时，

(1) $\boldsymbol{\beta}$不能被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

(2) $\boldsymbol{\beta}$能被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且表达式唯一，求出其表达式；

(3) $\boldsymbol{\beta}$能被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表达式不唯一，并求出一般表达式.

14. 设$(2,-1,1,-1)^T$ 是方程组

$$\begin{cases} x_1+ax_2+bx_3+2x_4=0, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ 3x_1+(2+a)x_2+(4+b)x_3+4x_4=4 \end{cases}$$

的一个解，求：

(1) 该方程组的全部解；

(2) 该方程组满足条件 $x_2=x_3$ 的解.

15. 已知齐次方程组(Ⅰ)：

$$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3=0, \\ x_1+3x_2+ax_3=0, \\ 3x_1+9x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$$

和方程(Ⅱ)：$x_1+3x_2+3x_3=a^2-9$ 有公共解，求 a 的值及所有公共解.

16. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_n]$的前 $n-1$ 个列向量线性相关，后 $n-1$ 个列向量线性无关，且 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$.

(1) 证明方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解；

(2) 求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

单元测验

一、填空题(每小题 3 分，共 18 分)

1. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,a,a)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,1,a)^T,\boldsymbol{\alpha}_4=(4,3,2,1)^T$ 线性相关，且 $a\neq1$，则 $a=$________.

2. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,1,-1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1,3)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,2,5)^T$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 等价，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的秩等于________.

3. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，且向量组 $p\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,s\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,t\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关，则 p,s,t 应满足条件________.

4. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)^T$ 是$\mathbb{R}^3$的一个基，则 $\boldsymbol{\beta}=(3,4,3)^T$ 在该基下的坐标为________.

5. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 0，且 rank $\boldsymbol{A}=n-1$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为________.

6. 设 rank $\boldsymbol{A}_{4\times3}=2$，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$都是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，且 $2\boldsymbol{\eta}_1+3\boldsymbol{\eta}_2=(3,1,2)^T,3\boldsymbol{\eta}_1+5\boldsymbol{\eta}_2=(6,3,-2)^T$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为________.

二、单选题(每小题 3 分，共 18 分)

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组中，线性无关的是 【 】

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+5\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$；

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$；

(C) $3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$;

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_4]$经初等行变换化为$\begin{bmatrix}1&1&1&3\\0&1&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$,则 【 】

(A) $\boldsymbol{\alpha}_4=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$;　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$;

(C) $\boldsymbol{\alpha}_4=-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$;　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为正交矩阵,则下列矩阵不是正交矩阵的是 【 】

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;　　(B) $\boldsymbol{B}^{-1}$;　　(C) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{-1}$;　　(D) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

4. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,$\boldsymbol{\beta}_1$可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,而向量 $\boldsymbol{\beta}_2$不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,则对于任意常数 k,必有 【 】

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$线性无关;　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,k\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$线性相关;

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$线性无关;　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1+k\boldsymbol{\beta}_2$线性相关.

5. 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{3\times3}$为不可逆矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 中元 a_{22}的代数余子式 $A_{22}\neq0$,则齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系是 【 】

(A) $(A_{12},A_{22},A_{32})^{\mathrm{T}}$;

(B) $(A_{21},A_{22},A_{23})^{\mathrm{T}}$;

(C) $(A_{11},A_{21},A_{31})^{\mathrm{T}},(A_{12},A_{22},A_{32})^{\mathrm{T}}$;

(D) $(A_{11},A_{12},A_{13})^{\mathrm{T}},(A_{21},A_{22},A_{23})^{\mathrm{T}}$.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是四维非零列向量,$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_4]$,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为$(1,0,2,0)^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 【 】

(A) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$;　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$;

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$;　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$.

三、(10 分)　设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,2,1)^{\mathrm{T}}$,求向量 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$,使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为正交向量组.

四、(10 分)　(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\a\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\b\end{bmatrix}$,问 a,b 为何值时,向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&2&a\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1&1\\2&0\\1&b\end{bmatrix}$,问 a,b 为何值时,矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解,并求出所有的解.

五、(10 分)　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}$,已知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解,求:

(1) λ,a;

(2) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

六、(10 分)　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,即 $\boldsymbol{A\beta}\neq\boldsymbol{0}$,试证明:向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

七、(12 分) 给出一个以

$$x=\begin{bmatrix}-16\\23\\0\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}14\\-20\\1\\3\\2\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}12\\-20\\2\\5\\1\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}14\\-20\\3\\1\\2\end{bmatrix}$$

为通解的线性方程组.

八、(12 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{\eta}_1$ 与 $\boldsymbol{\eta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同解,$\boldsymbol{\xi}$ 是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的非零解,证明:

(1) 向量组 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 线性无关;

(2) 若 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n-1$,则向量组 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 线性相关.

习题选解

(A)

7. 证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

证 容易看出

$$[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1]=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix},$$

记上式用矩阵乘法表示为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}$,则 $|\boldsymbol{C}|=2$,即 $\boldsymbol{C}$ 可逆. 于是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可逆当且仅当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆,即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

9. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关,证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

证 由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,因此 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示,即

$$\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

设有一组数 l_1,l_2,l_3,l_4,使得

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3+l_4(\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4)=\boldsymbol{0},$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 代入,整理得

$$(l_1-k_1l_4)\boldsymbol{\alpha}_1+(l_2-k_2l_4)\boldsymbol{\alpha}_2+(l_3-k_3l_4)\boldsymbol{\alpha}_3+l_4\boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{0}.$$

因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关,所以

$$\begin{cases}l_1-k_1l_4=0,\\ l_2-k_2l_4=0,\\ l_3-k_3l_4=0,\\ l_4=0,\end{cases}$$

解得 $l_1=l_2=l_3=l_4=0$,故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 3×3 矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix}$，证明 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

解 对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换化为阶梯矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

则 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}=2$. 又由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 得 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}+\mathrm{rank}\,\boldsymbol{B}\leqslant3$，从而 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{B}\leqslant1$. 所以 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关.

11. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，问常数 p,q 满足什么条件时，向量组 $p\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,q\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

解 设有一组数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1(p\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(q\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0},$$

整理后得

$$(k_3-k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1p-k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2q-k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}.$$

由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，因此

$$\begin{cases}k_3-k_1=0,\\ k_1p-k_2=0,\\ k_2q-k_3=0,\end{cases}$$

即得齐次线性方程组

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ p & -1 & 0\\ 0 & q & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

向量组 $p\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,q\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的充要条件是上述方程组只有零解，这等价于其系数行列式不为零，即 $pq\neq1$.

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，若存在正整数 k，使线性方程组 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有解向量 $\boldsymbol{\alpha}$，且 $\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，证明向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

证 设有一组数 $l_1,l_2,\cdots,l_k$，使得

$$l_1\boldsymbol{\alpha}+l_2\boldsymbol{A\alpha}+l_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+l_k\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},\qquad(*)$$

在上式两端同时左乘 $\boldsymbol{A}^{k-1}$，得到

$$l_1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}+l_2\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}+l_3\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+l_k\boldsymbol{A}^{2k-2}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},$$

即 $l_1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，从而 $l_1=0$. 代入(*)式得到

$$l_2\boldsymbol{A\alpha}+l_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+l_k\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},$$

再在上式两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^{k-2}$，得到

$$l_2\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}+l_3\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}+\cdots+l_k\boldsymbol{A}^{2k-3}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},$$

即 $l_2\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，得 $l_2=0$. 类似可得 $l_3=0,\cdots,l_k=0$，这说明向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性

无关.

14. 问 k 取何值时,$\boldsymbol{\beta}=(1,k,5)$能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-3,2)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,1)$线性表示?又 k 取何值时,$\boldsymbol{\beta}$不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示?

解 记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}]$,对矩阵$[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}]$做初等行变换化为阶梯矩阵:

$$[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -3 & -1 & k\\ 2 & 1 & 5\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & k+8\end{bmatrix}.$$

当 $k=-8$ 时,$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}]$,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$有解,$\boldsymbol{\beta}$能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示.

当 $k\neq-8$ 时,$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}<\operatorname{rank}[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}]$,方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$无解,$\boldsymbol{\beta}$不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示.

15. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1+b\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\ 1+b\\ 1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1+b\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}0\\ b\\ b^2\end{bmatrix}$,问当 b 取何值时

(1) $\boldsymbol{\beta}$可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,且表达式不唯一;

(2) $\boldsymbol{\beta}$可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,且表达式唯一;

(3) $\boldsymbol{\beta}$不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解 记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3]$,对矩阵$[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{\beta}]$做初等行变换:

$$[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{\beta}]=\begin{bmatrix}1+b & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+b & 1 & b\\ 1 & 1 & 1+b & b^2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1+b & b^2\\ 0 & b & -b & b-b^2\\ b & 0 & -b & -b^2\end{bmatrix}.$$

(1) 当 $b=0$ 时,得到 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的同解方程组

$$x_1=-x_2-x_3,$$

求得方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的通解为

$$(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=(-k-l,k,l)^{\mathrm{T}},$$

从而得表达式

$$\boldsymbol{\beta}=(-k-l)\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3,\quad k,l\text{ 可取任意数}.$$

$\boldsymbol{\beta}$可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,且表达式不唯一.

(2) 当 $b\neq0$ 时,对$[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{\beta}]$继续做初等行变换:

$$[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{\beta}]\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 1+b & b^2\\ 0 & 1 & -1 & 1-b\\ 0 & 0 & -3-b & 1-2b-b^2\end{bmatrix}.$$

当 $b\neq-3$ 时,$\boldsymbol{\beta}$可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,且表达式唯一.

(3) 当 $b=-3$ 时,$\boldsymbol{\beta}$不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

18. 设有向量组

(Ⅰ):$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}a\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}b\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$;

$$(\text{Ⅱ}):\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}9\\6\\-7\end{bmatrix},$$

已知向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)有相同的秩,且 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,求 a,b 的值.

解 设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]$,$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3]$. 因 $\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,故非齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}_3$ 有解. 对增广矩阵 $[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta}_3]$ 做初等行变换化为阶梯矩阵:

$$[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta}_3]=\begin{bmatrix}1&3&9&b\\2&0&6&1\\-3&1&-7&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&9&b\\0&-6&-12&1-2b\\0&0&0&5-b\end{bmatrix},$$

由 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta}_3]$ 知 $b=5$.

因为向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)有相同的秩,所以 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$. 而 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2$,因此 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=2$,即 $|\boldsymbol{B}|=15-a=0$,得 $a=15$.

19. 设有 n 维向量组(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与(Ⅱ):$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$,记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_m]$,$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\beta}_m]$,证明:若向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价. 并举反例说明逆命题不成立.

证 因为向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价,所以向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)的秩相等,从而 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$,即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价. 反之不成立,例如对于

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix},$$

有 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=2$,即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价,然而其列向量组不等价.

20. 写出一个以

$$\boldsymbol{x}=c_1\begin{bmatrix}2\\-3\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-2\\4\\0\\1\end{bmatrix}$$

为通解的齐次线性方程组,其中 c_1,c_2 为参数.

解 解齐次方程组

$$\begin{bmatrix}2&-3&1&0\\-2&4&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

得到一个基础解系 $(-2,-1,1,0)^{\mathrm{T}},(-3,-2,0,2)$. 要找的齐次方程组的系数矩阵可取为

$$\begin{bmatrix}-2&-1&1&0\\-3&-2&0&2\end{bmatrix}.$$

21. 设四阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_i=\boldsymbol{b}(i=1,2,3,4)$,其中

$$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4=\begin{bmatrix}2\\2\\2\\2\end{bmatrix},$$

求非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解 因为 rank $\boldsymbol{A}=2$,所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含向量个数为2,令

$$\boldsymbol{\xi}_1=(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=(0,2,-1,0)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\xi}_2=(\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4)-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=(1,3,1,2)^{\mathrm{T}},$$

则 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 而 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4)=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解,故其通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1(0,2,-1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,3,1,2)^{\mathrm{T}}+(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\quad k_1,k_2\text{ 为任意数}.$$

24. 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$,且其列向量都是方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0,\\2x_1-x_2+ax_3=0,\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$ 的解.

(1) 求 a;

(2) 证明 $|\boldsymbol{B}|=0$.

解 (1) 因为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是齐次方程组的解,且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$,所以齐次方程组有非零解,从而其系数行列式 $5(a-1)=0$,故 $a=1$.

(2) 将题中齐次线方程组的系数矩阵记为 $\boldsymbol{A}$,则 rank $\boldsymbol{A}=2$,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,于是 rank $\boldsymbol{A}+$ rank $\boldsymbol{B}\leqslant 3$,故 rank $\boldsymbol{B}\leqslant 1$,于是 $|\boldsymbol{B}|=0$.

26. 设由 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}$ 生成的向量空间为 V_1,由 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$ 生成的向量空间为 V_2,证明 $V_1=V_2$.

证 对矩阵 $[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2]$ 做初等行变换化为阶梯矩阵,由阶梯矩阵可看出

$$\mathrm{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2]=\mathrm{rank}[\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2]=\mathrm{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2],$$

所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 等价,它们生成相同的向量空间,即 $V_1=V_2$.

30. 试用 Gram-Schmidt 正交化方法将下列向量组标准正交化.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$.

解 (1) $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{\langle\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}\boldsymbol{\beta}_1=\dfrac{1}{2}(2,-1,1)^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{\langle\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2\rangle}{\langle\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2\rangle}\boldsymbol{\beta}_2=\frac{2}{3}(1,1,-1)^{\mathrm{T}}.$$

再单位化,得到标准正交向量组

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^{\mathrm{T}}.$$

(2) $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{2}(1,0,-1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{3}(1,3,-1,-1)^{\mathrm{T}}$.

再单位化,得到标准正交向量组

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,-1,2)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{2\sqrt{3}}(1,3,-1,-1)^{\mathrm{T}}.$$

31. 设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 2 的 5×4 矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\4\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}5\\-1\\-8\\9\end{bmatrix}$是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量,求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的一个标准正交基.

解 因为 $\dim N(\boldsymbol{A})=n-\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=4-2=2$,所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间 $N(\boldsymbol{A})$的基含两个向量. 易知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $N(\boldsymbol{A})$的一个基.

再对 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 标准正交化,得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\quad \boldsymbol{\beta}_2=\frac{2}{3}(-2,1,5,-3)^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{15}}(1,1,2,3)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{39}}(-2,1,5,-3)^{\mathrm{T}}.$$

则 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 是 $N(\boldsymbol{A})$的一个标准正交基.

32. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为实向量空间 V 的一个标准正交基,则 $\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)$也是 V 的一个标准正交基.

证 由题意知,对于任何 $i,j=1,2,3$,有

$$\langle\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j\rangle=\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{cases}0, & i\neq j,\\1, & i=j,\end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2\rangle&=\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3)^{\mathrm{T}}\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)\\&=\frac{1}{9}(2\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3-4\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2-\\&\quad 4\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3-4\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3)\\&=0.\end{aligned}$$

同理可证

$$\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3\rangle=\langle\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\rangle=0,\quad \langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1\rangle=\langle\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2\rangle=\langle\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_3\rangle=1,$$

所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$是 V 的一个标准正交基.

33. 设$\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维非零实向量,证明 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为正交矩阵.

证　因为 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵，且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}&=\left(\boldsymbol{E}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)\left(\boldsymbol{E}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)\\&=\boldsymbol{E}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}-\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\frac{4}{(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{2}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{E}-\frac{4}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\frac{4}{(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{2}}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E},\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

36. 验证下列集合对于所给定的线性运算是否构成$\mathbb{R}$上的线性空间.

(1) 所有 n 阶实反对称矩阵的集合 V_1，按矩阵的加法和数乘；

(2) $V_2=\left\{x(t)\,\middle|\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-x=0,x(t)\text{为实函数}\right\}$，按通常的函数加法和数乘；

(3) $V_3=\left\{f:[0,1]\to\mathbb{R}\,\middle|\,\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0\right\}$，按通常的函数加法和数乘；

(4) 设 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^2$，$\mathbb{R}^2$上不平行于$\boldsymbol{\alpha}$的所有向量的集合，按通常的向量加法和数乘；

(5) 在$\mathbb{R}^2$上定义如下的加法$\oplus$和数乘$\circ$：

$$(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\oplus(y_1,y_2)^{\mathrm{T}}=(x_1+y_1,x_2+y_2+x_1y_1)^{\mathrm{T}},$$

$$k\circ(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}=\left(kx_1,kx_2+\frac{k(k-1)}{2}x_1^2\right)^{\mathrm{T}}.$$

解　(1) 因为 V_1 是$\mathbb{R}^{n\times n}$的非空子集，并且对任何 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in V_1$ 及 $k\in\mathbb{R}$，有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}),$$

$$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A},$$

所以 V_1 是$\mathbb{R}^{n\times n}$的子空间，即 V_1 是实线性空间.

(2) 显然$\mathbb{R}$上所有连续实函数的全体 $C(\mathbb{R})$按照函数的加法和数乘构成实线性空间. 又因为 V_2 是 $C(\mathbb{R})$的非空子集，并且对任何 $x(t),y(t)\in V_2$ 及 $k\in\mathbb{R}$，有

$$\frac{\mathrm{d}^2(x+y)}{\mathrm{d}t^2}-(x+y)=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-x+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-y=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2(kx)}{\mathrm{d}t^2}-(kx)=k\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-kx=k\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-x\right)=0,$$

所以 V_2 是 $C(\mathbb{R})$的子空间，即 V_2 是实线性空间.

(3) 因为对任何 $f(x),g(x)\in V_3$ 及 $k\in\mathbb{R}$，有

$$\int_0^1(f(x)+g(x))\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=0,$$

$$\int_0^1 kf(x)\mathrm{d}x=k\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0,$$

并且可以验证 V_3 满足八条运算规律，因此它构成实线性空间.

(4) 该集合不构成线性空间，例如$(3,1)^{\mathrm{T}}$，$(-3,1)^{\mathrm{T}}$不平行于$(0,1)^{\mathrm{T}}$，但它们之和平行于$(0,1)^{\mathrm{T}}$.

(5) 显然，$\mathbb{R}^2$ 对于加法$\oplus$和数乘$\circ$两种运算是封闭的，并且关于加法$\oplus$满足交换律和结合律. 下面验证：对任何$(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$，$(y_1,y_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2$，及 $k,l\in\mathbb{R}$，满足线性空间的其余六条运算规律.

零元素为$(0,0)^{\mathrm{T}}$；

$(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$ 的负元素为$(-1)\circ(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}=(-x_1,-x_2+x_1^2)^{\mathrm{T}}$；

$1\circ(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$；

$$\begin{aligned}k\circ(l\circ(x_1,x_2)^{\mathrm{T}})&=k\circ\left(lx_1,lx_2+\frac{l(l-1)}{2}x_1^2\right)^{\mathrm{T}}\\&=\left(klx_1,klx_2+k\frac{l(l-1)}{2}x_1^2+\frac{k(k-1)}{2}l^2x_1^2\right)^{\mathrm{T}}\\&=\left(klx_1,klx_2+k\frac{kl(kl-1)}{2}x_1^2\right)^{\mathrm{T}}=(kl)\circ(x_1,x_2)^{\mathrm{T}};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k\circ(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\oplus l\circ(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}&=\left(kx_1,kx_2+\frac{k(k-1)}{2}x_1^2\right)^{\mathrm{T}}\oplus\left(lx_1,lx_2+\frac{l(l-1)}{2}x_1^2\right)^{\mathrm{T}}\\&=\left((k+l)x_1,(k+l)x_2+\frac{(k+l)(k+l-1)}{2}x_1^2\right)^{\mathrm{T}}\\&=(k+l)\circ(x_1,x_2)^{\mathrm{T}};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k\circ((x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\oplus(y_1,y_2)^{\mathrm{T}})&=k\circ(x_1+y_1,x_2+y_2+x_1y_1)^{\mathrm{T}}\\&=\left(k(x_1+y_1),k(x_2+y_2)+\frac{k(k-1)}{2}(x_1+y_1)^2\right)^{\mathrm{T}}\\&=\left(kx_1+ky_1,kx_2+ky_2+\frac{k(k-1)}{2}(x_1^2+y_1^2)+k^2x_1y_1\right)^{\mathrm{T}}\\&=\left(kx_1,kx_2+\frac{k(k-1)}{2}x_1^2\right)^{\mathrm{T}}\oplus\left(ky_1,ky_2+\frac{k(k-1)}{2}y_1^2\right)^{\mathrm{T}}\\&=k\circ(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\oplus k\circ(y_1,y_2)^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

因此$\mathbb{R}^2$ 按照加法$\oplus$和数乘$\circ$构成实线性空间.

39. 函数集合 $V=\{(a_2x^2+a_1x+a_0)\mathrm{e}^x\mid a_2,a_1,a_0\in\mathbb{R}\}$，按照函数的线性运算构成三维线性空间. 在 V 中取一个基 $x^2\mathrm{e}^x,x\mathrm{e}^x,\mathrm{e}^x$，求微分运算 D 在这个基下的矩阵.

解 先求出基 $x^2\mathrm{e}^x,x\mathrm{e}^x,\mathrm{e}^x$ 中每一个向量在运算 D 下的像：

$$\mathrm{D}(x^2\mathrm{e}^x)=2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x,\quad \mathrm{D}(x\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x,\quad \mathrm{D}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x,$$

再将它们在基 $x^2\mathrm{e}^x,x\mathrm{e}^x,\mathrm{e}^x$ 下的坐标向量构成一个矩阵，即

$$\mathrm{D}(x^2\mathrm{e}^x,x\mathrm{e}^x,\mathrm{e}^x)=(x^2\mathrm{e}^x,x\mathrm{e}^x,\mathrm{e}^x)\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

40. 在四维线性空间$\mathbb{R}^{2\times2}$中，证明：

$$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}$$

是$\mathbb{R}^{2\times2}$的一个基，并求矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}$在这个基下的坐标.

解 设有一组数 k_1,k_2,k_3,k_4，使得

$$k_1\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\end{bmatrix}+k_4\begin{bmatrix}-1&1\\1&-1\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

这等价于

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3-k_4=0, \\ k_1+k_2-k_3+k_4=0, \\ k_1-k_2+k_3+k_4=0, \\ k_1-k_2-k_3-k_4=0, \end{cases}$$

上述齐次方程组的系数行列式等于16,因此方程组只有唯一零解,即

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

线性无关,故这是$\mathbb{R}^{2\times 2}$的一组基.

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在上述这个基下的坐标为$(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$,则

$$x_1\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix},$$

这等价一个非齐次线性方程组的解,求解得

$$x_1=\frac{5}{2}, \quad x_2=-1, \quad x_3=0, \quad x_4=\frac{1}{2},$$

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的坐标为$\left(\frac{5}{2},-1,0,\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

41. 设 $\boldsymbol{A}_0=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$,对任意 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$,定义映射 $T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{X}$.

(1) 证明 T 是$\mathbb{R}^{2\times 2}$上的线性变换;

(2) 求 T 关于基$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$的矩阵.

解 (1) 因为对任何 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$及 $a,b\in\mathbb{R}$,有

$$T(a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}_0(a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B})=a\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}=aT(\boldsymbol{A})+bT(\boldsymbol{B}),$$

所以 T 是$\mathbb{R}^{2\times 2}$上的线性变换.

(2) 记

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix},$$

则有

$$T(\boldsymbol{B}_1)=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 7 & 7\end{bmatrix},$$

$$T(\boldsymbol{B}_2)=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix},$$

$$T(\boldsymbol{B}_3)=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -3\\ 7 & -7\end{bmatrix},$$

$$T(\boldsymbol{B}_4)=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix},$$

容易看出,$T(\boldsymbol{B}_2)$和 $T(\boldsymbol{B}_4)$在基 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4$ 下的坐标分别为

$$(-1,0,0,0)^{\mathrm{T}}, \quad (0,0,1,0)^{\mathrm{T}};$$

采用本章习题选解中第40题的方法,求得矩阵 $T(\boldsymbol{B}_1)$和 $T(\boldsymbol{B}_3)$在基 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4$ 下的坐标分别为

$$(5,-2,0,0)^{T},\quad (0,0,5,2)^{T},$$

因此 T 关于基 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4$ 的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(B)

42．设有两个向量组

$$(\text{Ⅰ}):\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\a+2\end{bmatrix};$$

$$(\text{Ⅱ}):\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\a+3\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\a+6\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\a+4\end{bmatrix}.$$

问：当 a 为何值时，向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价？当 a 为何值时，向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)不等价？

解 记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3]$，$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3]$，对矩阵 $[\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B}]$ 做初等行变换：

$$[\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B}]=\begin{bmatrix}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\2&3&a+2&a+3&a+6&a+4\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&2&2\\0&1&-1&2&1&1\\0&0&a+1&a-1&a+1&a-1\end{bmatrix}.$$

由此可知，当 $a\neq-1$ 时，$\text{rank}\,\boldsymbol{A}=\text{rank}\,\boldsymbol{B}=\text{rank}[\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{B}]=3$，故向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价.

当 $a=-1$ 时，$\text{rank}\,\boldsymbol{A}=2$，$\text{rank}\,\boldsymbol{B}=3$，因此向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)不等价.

43．设四维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1+a\\1\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\2+a\\2\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}3\\3\\3+a\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}4\\4\\4\\4+a\end{bmatrix}$，问 a 为何值时 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关？当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

解 对矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_4]$ 做初等行变换：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&4+a\\0&0&a&-a\\0&a&0&-a\\a&0&0&-a\end{bmatrix},$$

由上可知，$|\boldsymbol{A}|=0$ 即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关的充要条件是 $a=0$ 或 $a=-10$.

当 $a=0$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 1，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 中的任何一个向量都能成为其极大线性

无关组.当 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 作为极大线性无关组时,有 $\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4=4\boldsymbol{\alpha}_1$.

当 $a=-10$ 时,继续对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换:

$$\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix}1&2&3&-6\\0&0&-10&10\\0&-10&0&10\\-10&0&0&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

容易得出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组,且 $\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

44. 设有向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\a\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\a\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\a\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}-2\\a\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}-2\\a\\a\end{bmatrix}$.

试确定常数 a,使得向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示,但向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解 记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3],\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3]$,对矩阵 $[\boldsymbol{B}\quad\boldsymbol{A}]$ 做初等行变换:

$$[\boldsymbol{B}\quad\boldsymbol{A}]=\begin{bmatrix}1&-2&-2&1&1&a\\1&a&a&1&a&1\\a&4&a&a&1&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&-2&-2&1&1&a\\0&a+2&a+2&0&a-1&1-a\\0&0&a-4&0&3(1-a)&-(1-a)^2\end{bmatrix}.$$

当 $a=-2$ 时,则

$$[\boldsymbol{B}\quad\boldsymbol{A}]\to\begin{bmatrix}1&-2&-2&1&1&-2\\0&0&0&0&-3&3\\0&0&-6&0&9&-9\end{bmatrix},$$

显然 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示,因此 $a\neq-2$.

当 $a=4$ 时,则

$$[\boldsymbol{B}\quad\boldsymbol{A}]\to\begin{bmatrix}1&-2&-2&1&1&4\\0&6&6&0&3&-3\\0&0&0&0&-9&-9\end{bmatrix},$$

显然 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示,因此 $a\neq4$.

而当 $a\neq-2$,且 $a\neq4$ 时,$\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}]=3$,此时 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示.

对矩阵 $[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}]$ 做初等行变换:

$$[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}]=\begin{bmatrix}1&1&a&1&-2&-2\\1&a&1&1&a&a\\a&1&1&a&4&a\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&a&1&-2&-2\\0&a-1&1-a&0&a+2&a+2\\0&0&2-a-a^2&0&6+3a&4a+2\end{bmatrix},$$

由题设,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,必有 $a-1=0$ 或者 $2-a-a^2=0$,即 $a=1$ 或者

$a=-2$.

综上所述，满足题设条件的只能是 $a=1$.

45. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为三维列向量，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，证明：

(1) rank $\boldsymbol{A}\leqslant 2$；

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 rank $\boldsymbol{A}<2$.

证 (1) 因为 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\leqslant \operatorname{rank}\boldsymbol{\alpha}\leqslant 1$，$\operatorname{rank}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant 1$，所以

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant 2.$$

(2) 因为 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 对应分量成比例，即 $\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\beta}$，于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{\beta}(k\boldsymbol{\beta})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(k^2+1)\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}},$$

所以

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}((k^2+1)\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})\leqslant 1<2.$$

46. 证明：n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充要条件是

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \end{vmatrix}\neq 0.$$

证 设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_n]$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关当且仅当 rank $\boldsymbol{A}=n$，这等价于 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，这又等价于 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{A}|\neq 0$，即

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n \end{vmatrix}=\left|\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{\alpha}_n]\right|\neq 0.$$

47. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geqslant 2)$ 线性无关，令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+l_1\boldsymbol{\alpha}_m,\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+l_2\boldsymbol{\alpha}_m,\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\beta}_{m-1}=\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+l_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_m,$$

证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{m-1}$ 线性无关.

证 设有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_{m-1}$，使得

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{m-1}\boldsymbol{\beta}_{m-1}=\boldsymbol{0},$$

将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{m-1}$ 的表示式代入上式

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+l_1\boldsymbol{\alpha}_m)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+l_2\boldsymbol{\alpha}_m)+\cdots+k_{m-1}(\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+l_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_m)=\boldsymbol{0},$$

整理后得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+(k_1l_1+k_2l_2+\cdots+k_{m-1}l_{m-1})\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0},$$

从而由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，得

$$k_1=k_2=\cdots=k_{m-1}=k_1l_1+k_2l_2+\cdots+k_{m-1}l_{m-1}=\boldsymbol{0},$$

故向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{m-1}$ 线性无关.

48. 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行 $(a,b,c)\neq\boldsymbol{0}$，矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$（$k$ 为常数），且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

解 容易看出，当 $k\neq 9$ 时，rank $\boldsymbol{B}=2$，从而由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 知 rank $\boldsymbol{A}+$ rank $\boldsymbol{B}\leqslant 3$，于是

rank $\boldsymbol{A}\leqslant 1$. 而 a,b,c 不全为零,即 rank $\boldsymbol{A}\geqslant 1$,故 rank $\boldsymbol{A}=1$. 此时

$$\dim N(\boldsymbol{A}) = n - \text{rank}\,\boldsymbol{A} = 2,$$

即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含两个向量. 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第一列和第三列线性无关,可作为基础解系,因此 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x} = k_1(1,2,3)^{\mathrm{T}} + k_2(3,6,k)^{\mathrm{T}},\quad k_1,k_2\ 为任意数.$$

当 $k=9$ 时,rank $\boldsymbol{B}=1$,类似地有 rank $\boldsymbol{A}\leqslant 2$,rank $\boldsymbol{A}\geqslant 1$,从而 rank $\boldsymbol{A}=1$ 或 rank $\boldsymbol{A}=2$.

若 rank $\boldsymbol{A}=2$,则

$$\dim N(\boldsymbol{A}) = n - \text{rank}\,\boldsymbol{A} = 1,$$

方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x} = k_1(1,2,3)^{\mathrm{T}},\quad k_1\ 为任意数.$$

若 rank $\boldsymbol{A}=1$,则

$$\dim N(\boldsymbol{A}) = n - \text{rank}\,\boldsymbol{A} = 2,$$

此时与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 同解的方程组为

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

不妨设 $a\neq 0$,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x} = k_1\left(-\frac{b}{a},1,0\right)^{\mathrm{T}} + k_2\left(-\frac{c}{a},0,1\right)^{\mathrm{T}},\quad k_1,k_2\ 为任意数.$$

49. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3]$,$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\\ k & 4 & 6\end{bmatrix}$,试求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大线性无关组,并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

解 当 $k\neq 2$ 时,rank $\boldsymbol{B}=2$,由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 有 rank $\boldsymbol{A}$+rank $\boldsymbol{B}\leqslant 3$,从而 rank $\boldsymbol{A}\leqslant 1$. 由 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$ 知 rank $\boldsymbol{A}\geqslant 1$,故 rank $\boldsymbol{A}=1$. 此时向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 1,取 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大线性无关组. 根据 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,得

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + k\boldsymbol{\alpha}_3 = 0,\\ \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3 = 0,\end{cases}$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_3=0\boldsymbol{\alpha}_1$.

当 $k=2$,则 rank $\boldsymbol{B}=1$,类似地有 rank $\boldsymbol{A}\leqslant 2$,rank $\boldsymbol{A}\geqslant 1$,从而 rank $\boldsymbol{A}=1$ 或 rank $\boldsymbol{A}=2$.

若 rank $\boldsymbol{A}=1$,即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 1,则取 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大线性无关组,由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,有

$$\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3 = 0,$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}_2=k_1\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\dfrac{k_1-1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1$.

若 rank $\boldsymbol{A}=2$,即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2,则不妨取 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大线性无关组,由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,有

$$\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0},$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3$.

50. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,$|\boldsymbol{A}|=0$,若 $\boldsymbol{A}$ 的某元 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}\neq 0$,证明:$(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in})^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

证 由$|\boldsymbol{A}|=0$知$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}<n$，而$\boldsymbol{A}$的某个代数余子式非零，故$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}\geqslant n-1$，于是$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}=n-1$. 从而$\dim N(\boldsymbol{A})=n-\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}=1$，即$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系含一个向量.

根据$\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$可知，$\boldsymbol{A}^*$的每个列向量都是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解. 因$\boldsymbol{A}$的某个代数余子式，故可选$\boldsymbol{A}^*$的第$i$个列向量作为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系.

51. 设$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,r;r<n)$是$n$维实向量，且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关. 又已知$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$是齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0\end{cases}$$

的非零解，试判断向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$的线性相关性.

解 设有$r+1$个数$k_1,k_2,\cdots,k_r,k$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+k\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}, \tag{$*$}$$

两边均与向量$\boldsymbol{\beta}$作内积得

$$\langle\boldsymbol{\beta},k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+k\boldsymbol{\beta}\rangle=0. \tag{$**$}$$

由于$\boldsymbol{\beta}$是题中齐次方程组的非零解，即

$$\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1\rangle=\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2\rangle=\cdots=\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_r\rangle=0,$$

因此由($**$)式得

$$\langle\boldsymbol{\beta},k\boldsymbol{\beta}\rangle=k\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\rangle=0.$$

因$\boldsymbol{\beta}$为非零向量，故$\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\rangle\neq0$，从而$k=0$. 代入($*$)式得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=0,$$

由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关，可知$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$的线性无关.

52. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶正交矩阵，且$|\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{B}|$，证明$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$为不可逆矩阵.

证 因为$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为正交矩阵，即$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，所以

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B},$$

两边取行列式得$|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{B}|$，即

$$(|\boldsymbol{A}|-|\boldsymbol{B}|)\,|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0,$$

从而由$|\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{B}|$知$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$，故$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$为不可逆矩阵.

53. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶正交矩阵，$n$为奇数，证明$|(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})|=0$.

证 因为$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为正交矩阵，所以$|\boldsymbol{A}|^2=1$，$|\boldsymbol{B}|^2=1$，且由第52题知

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B},$$

从而

$$(|\boldsymbol{A}|-|\boldsymbol{B}|)\,|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0. \tag{$*$}$$

同理可证

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B},$$

于是

$$(|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|)\,|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=0. \tag{$**$}$$

当$|\boldsymbol{A}|\neq|\boldsymbol{B}|$时，由($*$)式得$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$，故$|(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})|=0$；

当$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$时，$|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|\neq0$，由($**$)式得$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=0$，故$|(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})|=0$.

54. 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0,\end{cases}$$

其中 $\sum_{i=1}^{n}a_i\neq0$. 试讨论 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 b 满足何种关系时，

(1) 方程组仅有零解；

(2) 方程组有非零解，在有非零解时，求此方程组的一个基础解系.

解 (1) 上述方程组只有零解当且仅当系数行列式不为零，即 $b^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i+b\right)\neq0$，因此，当 $b\neq0$ 且 $b\neq-\sum_{i=1}^{n}a_i$ 时，方程组仅有零解.

(2) 当 $b=0$ 或 $b=-\sum_{i=1}^{n}a_i$ 时，方程组有非零解.

当 $b=0$ 时，方程组变为

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0.$$

因 $\sum_{i=1}^{n}a_i\neq0$，故不妨设 $a_1\neq0$. 此时，方程组的基础解系为

$$\left(-\frac{a_2}{a_1},1,0,0,\cdots,0\right)^{\mathrm T},\quad\left(-\frac{a_3}{a_1},0,1,0,\cdots,0\right)^{\mathrm T},\quad\left(-\frac{a_n}{a_1},0,0,0,\cdots,1\right)^{\mathrm T}.$$

当 $b=-\sum_{i=1}^{n}a_i$ 时，由 $\sum_{i=1}^{n}a_i\neq0$ 知 $b\neq0$. 对方程组的系数矩阵做初等行变换：将第 n 行的 (-1) 倍加到前 $n-1$ 行；再将前 $n-1$ 行都除以 b；然后将第 i 行的 $(-a_i)$ 倍加到第 n 行 $(i=1,2,\cdots,n-1)$，此时第 n 行全为零，即

$$\begin{bmatrix}a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1}+b & a_n\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n+b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix},$$

从而方程组的基础解系为 $(1,1,\cdots,1)^{\mathrm T}$.

55. 设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1\\ & & & & a^2 & 2a\end{bmatrix}_{n\times n},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}.$$

(1) 证明行列式$|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$;

(2) 当 a 为何值时,该方程组有唯一解,并求 x_1;

(3) 当 a 为何值时,该方程组有无穷多解,并求通解.

解 (1) 对$|\boldsymbol{A}|$做初等行变换 $r_{i+1}-\dfrac{ia}{i+1}r_i(i=1,2,\cdots,n-1)$化为上三角行列式,得

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3a}{2} & 1 & & & \\ & 0 & \frac{4a}{3} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \frac{na}{n-1} & 1 \\ & & & & 0 & \frac{(n+1)a}{n} \end{vmatrix}=(n+1)a^n.$$

(2) 方程组有唯一解的充要条件是$|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n\neq0$,即 $a\neq0$.由 Cramer 法则知 $x_1=\dfrac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|}$,将行列式$|\boldsymbol{A}_1|$按第一列展开即得与$|\boldsymbol{A}|$相同的 $n-1$ 阶行列式,故

$$|\boldsymbol{A}_1|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}=na^{n-1},$$

于是 $x_1=\dfrac{n}{(n+1)a}$.

(3) 当 $a=0$ 时,易知方程组的通解为

$$x_1=k(1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}+(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\quad k \text{ 为任意数}.$$

56. 设有四元齐次线性方程组(Ⅰ):$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0,\\ x_1+2x_2+x_3-x_4=0,\end{cases}$且已知另一个四元齐次线性方程组(Ⅱ)的一个基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,a+2,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,4,a+8)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求方程组(Ⅰ)的一个基础解系;

(2) 当 a 为何值时,方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解?在有非零公共解时,求出全部非零公共解.

解 (1) 对方程组(Ⅰ)的系数矩阵做初等行变换:

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2 & 3 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 0 & -1\end{bmatrix},$$

得到(Ⅰ)的同解方程组

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=x_3,\\ 3x_1+5x_2=x_4,\end{cases}$$

解得一个基础解系

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,2,3)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2=(0,1,3,5)^{\mathrm{T}}.$$

(2) 方法1 方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解当且仅当存在不全为零的数 y_1,y_2,y_3,y_4,使得

$$y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2=y_3\boldsymbol{\alpha}_1+y_4\boldsymbol{\alpha}_2,$$

这又等价于齐次方程组(Ⅲ):

$$[\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad -\boldsymbol{\alpha}_1\quad -\boldsymbol{\alpha}_2]\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

有非零解.对齐次方程组(Ⅲ)的系数矩阵做初等行变换,得

$$[\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad -\boldsymbol{\alpha}_1\quad -\boldsymbol{\alpha}_2]=\begin{bmatrix}1&0&-2&1\\0&1&1&-2\\2&3&-a-2&-4\\3&5&-1&-a-8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-2&1\\0&1&1&-2\\0&0&a+1&0\\0&0&0&a+1\end{bmatrix},$$

所以 $a=-1$ 时,方程组(Ⅲ)有非零解,此时由同解方程组

$$\begin{cases}y_1=2y_3-y_4,\\y_2=-y_3+2y_4\end{cases}$$

解得基础解系 $(2,-1,1,0)^{\mathrm{T}},(-1,2,0,1)^{\mathrm{T}}$,即方程组(Ⅲ)的全部非零解为

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\2\\0\\1\end{bmatrix},\quad k_1,k_2\text{ 不同时为零},$$

从而

$$y_1=2k_1-k_2,\quad y_2=-k_1+2k_2.$$

于是方程组(Ⅰ)、(Ⅱ)的全部非零公共解为

$$(2k_1-k_2)\boldsymbol{\beta}_1+(-k_1+2k_2)\boldsymbol{\beta}_2=k_1\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\2\\4\\7\end{bmatrix},\quad k_1,k_2\text{ 不同时为零}.$$

方法2 方程组(Ⅱ)的通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2k_1-k_2\\-k_1+2k_2\\(a+2)k_1+4k_2\\k_1+(a+8)k_2\end{bmatrix},$$

代入方程组(Ⅰ),化简得关于 k_1,k_2 的线性方程组(Ⅳ):

$$\begin{cases}-(a+1)k_1=0,\\(a+1)k_1-(a+1)k_2=0,\end{cases}$$

方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解当且仅当方程组(Ⅳ)有非零解,这又等价于方程组(Ⅳ)的系数行列式$-(a+1)^2=0$,即得$a=-1$.此时方程组(Ⅳ)的全部非零解是k_1,k_2不全为零,从而方程组(Ⅰ)、(Ⅱ)的全部非零公共解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = k_1\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad k_1,k_2\text{不全为零}.$$

57. 某公司销售部在6月份经统计得知前五个月的销售额依次为4.0万元,4.4万元,5.2万元,6.4万元和8.4万元.统计员发现这些数据接近一个二次多项式函数.试求这组数据的拟合曲线,并预测该公司12月份的销售额.

解 因为销售额与月份的关系近似于一个二次多项式函数,所以设这组数据的拟合曲线为

$$y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2,$$

由题设条件得到正规方程组

$$\begin{bmatrix} 5 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28.4 \\ 96 \\ 380.8 \end{bmatrix},$$

解得

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{5} & -\frac{33}{10} & \frac{1}{2} \\ -\frac{33}{10} & \frac{187}{70} & -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{14} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 28.4 \\ 96 \\ 380.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.2400 \\ -0.4629 \\ 0.2571 \end{bmatrix},$$

即拟合曲线为

$$y = f(x) = 4.2400 - 0.4629x + 0.2571x^2,$$

于是该公司12月份的销售额约为$f(12)=35.7076$.

58. 设有数列$\{a_n\}$满足

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, \quad n \geqslant 3,$$

试求$\{a_n\}$的通项公式.

解 由主教材知,$V=\{\{a_n\} \mid a_n\in\mathbb{R}\}$构成一个无限维实线性空间,而

$$W = \{\{a_n\} \in V \mid a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}(n \geqslant 3)\}$$

是V的线性子空间,且W是二维线性空间.

假设W中有等比数列$\{a_n\}$满足$a_n=a_1q^{n-1}=q^{n-1}(n=1,2,\cdots)$,$q\neq0$,则由$\{a_n\}\in W$知当$n\geqslant3$时,有

$$q^{n-1} = 2q^{n-2} + 3q^{n-3},$$

即$q^2=2q+3$,解得$q_1=3$,$q_2=-1$.

显然$n\geqslant3$时,$q_i^{n-1}=2q_i^{n-2}+3q_i^{n-3}(i=1,2)$.这说明$W$中确实存在分别以$q_1,q_2$为公比的等比数列$\{q_1^{n-1}\}$,$\{q_2^{n-1}\}$.由于$q_1\neq q_2$,因此这两个数列构成$W$的一个基.于是对任何$\{a_n\}\in$

W,必存在两个数 c,d,使得

$$\{a_n\} = c\{q_1^{n-1}\} + d\{q_2^{n-1}\},$$

由 $a_1=1, a_2=1$ 即得

$$\begin{cases} c+d=1, \\ cq_1+dq_2=1, \end{cases}$$

解得 $c=\frac{1}{2}, d=\frac{1}{2}$. 所以 W 中数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n = \frac{1}{2}(3^{n-1}+(-1)^{n-1}), \quad n \geqslant 3.$$

第 5 章

矩阵的相似化简

基本要求

1. 理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质，掌握求特征值和特征向量的方法.

2. 理解相似矩阵的概念和性质，了解矩阵相似对角化的条件，熟悉矩阵相似对角化的方法.

3. 理解实对称矩阵的特征值和特征向量的性质，掌握实对称矩阵的正交相似对角化方法.

4. 知道 Jordan 块、Jordan 矩阵、Jordan 定理和 Cayley-Hamilton 定理，会求 Jordan 标准形和相似变换矩阵.

内容综述

一、特征值与特征向量

1. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，如果存在数 λ 和 n 维非零向量 $\boldsymbol{p}$，使得 $\boldsymbol{Ap}=\lambda\boldsymbol{p}$，则称数 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，向量 $\boldsymbol{p}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ 的一个特征向量.

2. 行列式 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式. 方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程.

3. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值就是特征方程的根，$\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量就是齐次方程组 $(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零解.

注 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_0 的有限个特征向量的线性组合所产生的任何非零向量都是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ_0 的特征向量.

4. 若 λ_0 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的 t 重根，则称 λ_0 为 $\boldsymbol{A}$ 的 t 重特征值，称 t 为 λ_0 的代数重数；$V_{\lambda_0}=\{\boldsymbol{p}\in\mathbb{C}^n\,|\,\boldsymbol{Ap}=\lambda_0\boldsymbol{p}\}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征子空间，$n-\text{rank}(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$ 称为特征值 λ_0 的几何重数.

5. 设 λ 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，那么

(1) 对任何非负整数 k，λ^k 是 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值；

(2) 对任何多项式 $f(x)$，$f(\lambda)$ 是矩阵多项式 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值；

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 λ^{-1} 是逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值，$|\boldsymbol{A}|\lambda^{-1}$ 是伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

6. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

(1) $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|\boldsymbol{A}|$；

(2) $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$.

7. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的相异特征值对应的特征向量线性无关.

二、相似矩阵的概念和性质

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，或 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，并且称 $\boldsymbol{P}$ 为相似变换矩阵.

注 相似是方阵之间的一种等价关系；与数量矩阵相似的矩阵只能是它自己.

2. 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则

(1) $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$；

(2) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$；

(3) 对于任何多项式 $f(x)$，有 $f(\boldsymbol{A})\sim f(\boldsymbol{B})$；

(4) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式，从而有相同的特征值；

(5) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的迹.

注 上述的(1)、(2)、(4)、(5)不是矩阵相似的充分条件，(3)是矩阵相似的充要条件.

三、相似对角化的条件

1. $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量(相似变换矩阵的 n 个列就是特征向量，对角矩阵的对角元就是特征值). 特别地，若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异的特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

2. 若两个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 互异，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

3. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中任一特征值的几何重数不大于代数重数.

4. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的全部相异特征值的几何重数之和等于 n，这等价于 $\boldsymbol{A}$ 的每个相异特征值的几何重数等于代数重数.

5. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{P}^{-1},$$

则对于任何多项式 $f(x)$，均有

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n))\boldsymbol{P}^{-1}.$$

四、实对称矩阵的对角化

1. 实对称矩阵的特征值均为实数、特征向量可以取为实向量.

2. 实对称矩阵的相异特征值对应的特征向量是正交的.

3. n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可正交相似对角化，即存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值，$\boldsymbol{Q}$ 的列向量是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个两两正交的单位特征向量，它们依次对应于特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

五、Jordan 标准形

1. 形如

$$J_m(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{bmatrix}_{m\times m}$$

的矩阵称为一个 m 阶 Jordan 块,其中 $\lambda\in\mathbb{C}$.

2. 由若干个 Jordan 块组成的分块对角矩阵

$$J=\operatorname{diag}(J_{m_1}(\lambda_1),J_{m_2}(\lambda_2),\cdots,J_{m_s}(\lambda_s))$$

称为 $m_1+m_2+\cdots+m_s$ 阶 Jordan 矩阵.

3. Jordan 定理:对于任何 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$,总存在 n 阶可逆矩阵 P,使得

$$P^{-1}AP=J=\operatorname{diag}(J_{m_1}(\lambda_1),J_{m_2}(\lambda_2),\cdots,J_{m_s}(\lambda_s)),$$

若不考虑各 Jordan 块的排列次序,则 Jordan 矩阵 J 是由 A 唯一确定的. J 称为 A 的 Jordan 标准形.

4. Cayley-Hamilton 定理:设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $\varphi(\lambda)=|\lambda E-A|$,则 $\varphi(A)=\mathbf{0}$.

疑难辨析

问题 1 矩阵的相似与矩阵的等价有什么关系?

答 矩阵的相似是同阶矩阵之间的一种关系,矩阵的等价是同型矩阵之间的一种关系.

若矩阵 $A\sim B$,则存在可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP=B$,从而 $A\cong B$,即相似的矩阵必定等价. 但是,等价的矩阵不一定相似. 对于矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$A\cong B$. 因为 A 是数量矩阵,而 B 不是数量矩阵,所以 A 与 B 不相似.

问题 2 矩阵 A 的一个特征值对应无穷多个特征向量,试问:矩阵 A 的一个特征向量能否同时对应于 A 的两个不同的特征值?

答 否. 这是因为,若 p 是 A 的对应于相异特征值 λ_1,λ_2 的特征向量,即

$$Ap=\lambda_1 p,\quad Ap=\lambda_2 p,\quad p\neq\mathbf{0},$$

则 $(\lambda_1-\lambda_2)p=\mathbf{0}$,由 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 知 $p=\mathbf{0}$,矛盾. 即 A 的一个特征向量只能对应于 A 的一个特征值.

问题 3 矩阵 A 的相异特征值对应的特征向量的线性组合是否为 A 的特征向量?

答 设 λ_1,λ_2 是 A 的相异特征值,它们对应的特征向量依次为 p_1,p_2,则

$$Ap_1=\lambda_1 p_1,\quad Ap_2=\lambda_2 p_2.$$

下面考察线性组合 $k_1p_1+k_2p_2$.

(1) 当 k_1,k_2 全为零时, $k_1p_1+k_2p_2=\mathbf{0}$ 不是 A 的特征向量.

(2) 当 k_1,k_2 中一个为零、另一个不为零时,显然 $k_1p_1+k_2p_2$ 是 A 的特征向量.

(3) 当 k_1,k_2 全不为零时, $k_1p_1+k_2p_2$ 不是 A 的特征向量. 事实上,若 $k_1p_1+k_2p_2$ 是 A

的特征向量,则存在数 λ,使得

$$A(k_1 p_1 + k_2 p_2) = \lambda(k_1 p_1 + k_2 p_2),$$

从而 $k_1\lambda_1 p_1 + k_2\lambda_2 p_2 = \lambda(k_1 p_1 + k_2 p_2)$,即

$$k_1(\lambda_1 - \lambda) p_1 + k_2(\lambda_2 - \lambda) p_2 = 0.$$

因 $\lambda_1 \neq \lambda_2$,故 p_1, p_2 线性无关,于是由上式知

$$k_1(\lambda_1 - \lambda) = 0, \quad k_2(\lambda_2 - \lambda) = 0,$$

而 k_1, k_2 全不为零,所以 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$,与 λ_1, λ_2 相异的假设矛盾.

问题 4 方阵 A 与其转置矩阵 A^T 有相同的特征值,试问它们对应于同一个特征值的特征向量是否相同.

答 否. 例如,对应于

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

的同一个特征值 1,A 的所有特征向量和 A^T 的所有特征向量分别为

$$k\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad l\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad k, l \text{ 为任意非零数},$$

即 A 与 A^T 对应于特征值 1 的特征向量不相同.

问题 5 相似矩阵的特征值是相同的,试问相似矩阵对应于同一个特征值的特征向量之间有何关系.

答 设 $A \sim B$,即存在可逆矩阵 P,使得 $P^{-1}AP = B$; λ 是 A 和 B 的任一特征值,则 p 是 A 的对应于特征值 λ 的特征向量当且仅当

$$Ap = \lambda p, \quad p \neq 0,$$

从而

$$BP^{-1}p = P^{-1}Ap = \lambda P^{-1}p, \quad P^{-1}p \neq 0,$$

即 $P^{-1}p$ 是 B 的对应于特征值 λ 的特征向量.

问题 6 设 A 和 B 为同阶方阵,下列哪些命题是正确的?

(1) 若 λ 是 A, B 的特征值,则 λ 也是 $A+B$ 的特征值.

(2) 若 λ 是 A, B 的特征值,则 λ 也是 AB 的特征值.

(3) 若 p 是 A, B 的特征向量,则 p 也是 $A+B$ 的特征向量.

(4) 若 p 是 A, B 的特征向量,则 p 也是 AB 的特征向量.

答 (1) 错误. 反例如下: 2 是矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

的特征值,但是 2 不是 $A+B$ 的特征值.

(2) 错误. 反例同(1),2 是矩阵 A, B 的特征值,但是 2 不是 AB 的特征值.

(3) 正确. 这是因为,由条件知存在数 λ_1 和 λ_2,使得

$$Ap = \lambda_1 p, \quad Bp = \lambda_2 p, \quad p \neq 0,$$

从而

$$(A+B)p = Ap + Bp = (\lambda_1 + \lambda_2)p, \quad p \neq 0,$$

即 p 也是 $A+B$ 的对应于特征值 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的特征向量.

(4) 正确. 证明与(3)类似.

问题 7 实对称矩阵必能对角化,那么可对角化的矩阵一定是实对称矩阵吗?

答 可对角化的矩阵不一定是实对称矩阵. 例如,矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3\\0&4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$$

满足 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,且 $\boldsymbol{B}$ 是对角矩阵,故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化,但 $\boldsymbol{A}$ 不是对称矩阵.

问题 8 实方阵的特征向量一定是实向量吗?

答 当实方阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵时,$\boldsymbol{A}$ 的特征向量不一定是实向量,但由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是实数,因此其特征向量可以取为实向量.

当实方阵 $\boldsymbol{A}$ 不是对称矩阵时,$\boldsymbol{A}$ 的特征向量可能取不到实向量. 例如矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$$

的特征值为 $1+\mathrm{i}$ 和 $1-\mathrm{i}$. 不难求得对应于 $1+\mathrm{i}$ 和 $1-\mathrm{i}$ 的全部特征向量分别为

$$k\begin{bmatrix}1\\\mathrm{i}\end{bmatrix}\quad 和\quad l\begin{bmatrix}\mathrm{i}\\1\end{bmatrix},\quad k\ 和\ l\ 是任意非零数.$$

这说明 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量都不是实向量.

问题 9 实对称矩阵的特征值必为实数,那么正交矩阵的特征值有什么特点?

答 设 λ 是 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值,$\boldsymbol{p}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 是对应于 λ 的特征向量,则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}$.

由于正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵,因此

$$\bar{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\bar{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}=\bar{\lambda}\,\bar{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}},$$

上式两边右乘 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}$,得

$$\bar{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\bar{\lambda}\,\bar{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=\bar{\lambda}\lambda\,\bar{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p},\qquad 即\qquad \bar{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}=|\lambda|^2\,\bar{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}.$$

又由 $\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}$ 知

$$\bar{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}=\bar{a}_1a_1+\bar{a}_2a_2+\cdots+\bar{a}_na_n>0,$$

于是 $|\lambda|=1$,即正交矩阵的任何特征值的模均为 1.

问题 10 将实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 t 重($t\geqslant 2$)特征值 λ 对应的 t 个线性无关的特征向量正交化之后得到的 t 个向量还是 λ 对应的特征向量吗?

答 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ 的 t 个线性无关的特征向量,将其正交化后得到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$. 根据 Gram-Schmidt 正交化方法,每个 $\boldsymbol{\beta}_i$ 都是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_t$ 的线性组合,从而都是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ 的特征向量.

问题 11 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 不是实对称矩阵,能否将 $\boldsymbol{A}$ 正交相似对角化?

答 否. 这是因为,$\boldsymbol{A}$ 的相异特征值对应的特征向量不一定正交,所以将 $\boldsymbol{A}$ 正交相似对角化必定要把 $\boldsymbol{A}$ 的相异特征值对应的特征向量正交化,即将相异特征值对应的特征向量进行线性组合,这样产生的向量不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

范例精讲

题型 1 特征值的概念和性质

例 1 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶反对称矩阵,λ_1 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,证明 $-\lambda_1$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

证　方法 1　设 $\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_1 的特征向量，则 $\boldsymbol{Ap}=\lambda_1\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}$，故

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}=-\boldsymbol{Ap}=(-\lambda_1)\boldsymbol{p},$$

即 $-\lambda_1$ 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的特征值，从而 $-\lambda_1$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

方法 2　由题设知，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，且 $|\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$. 又

$$\begin{aligned}|(-\lambda_1)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|&=(-1)^n|\lambda_1\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=(-1)^n|\lambda_1\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|\\&=(-1)^n|\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0,\end{aligned}$$

从而 $-\lambda_1$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

注　对于涉及 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ 的特征向量的题型，首先应考虑特征值与特征向量的定义 $\boldsymbol{Ap}=\lambda\boldsymbol{p}$.

例 2　设二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个相异特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量，且 $\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

解　设 λ_1,λ_2 为 $\boldsymbol{A}$ 的相异特征值，不妨设 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1$，则必有 $\boldsymbol{A\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$. 因

$$\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

即

$$\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

故

$$(\lambda_1^2-1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_2^2-1)\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0},$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，知 $\lambda_1^2=1,\lambda_2^2=1$. 而 $\lambda_1\neq\lambda_2$，因此 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2=-1$.

例 3　设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=0$，$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$，$|3\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}|=0$，则 $|\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{E}|$ 等于　【　】

(A) $\frac{5}{3}$；　(B) $\frac{2}{3}$；　(C) $-\frac{2}{3}$；　(D) $-\frac{5}{3}$.

解　由题设条件知 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值分别为 $\lambda_1=-\frac{2}{3},\lambda_2=1,\lambda_3=\frac{3}{2}$. 因此 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-1$，且 $\boldsymbol{A}^*$ 对应的特征值分别为

$$\mu_1=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1}=\frac{3}{2},\quad \mu_2=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2}=-1,\quad \mu_3=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_3}=-\frac{2}{3},$$

故 $\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{E}$ 的三个特征值分别为 μ_1-1,μ_2-1,μ_3-1，从而

$$|\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{E}|=(\mu_1-1)(\mu_2-1)(\mu_3-1)=\frac{5}{3}.$$

所以应选(A).

注　若 $|a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{E}|=0(a\neq0)$，则 $\lambda=-\frac{b}{a}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

例 4　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维单位列向量，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，则　【　】

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆；　(B) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆；

(C) $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆；　(D) $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

解　因为由特征值和特征向量的定义可推出，$\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 $n-1$ 个 0，一个 1，所以 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 $n-1$ 个 1，一个 0，因此 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}|=0$，从而 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆，应选(A).

对于(B)，而 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 $n-1$ 个 1，一个 2，则 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}|\neq0$.

对于(C)，而 $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的特征值为 $n-1$ 个 1，一个 3，则 $|\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}|\neq0$.

对于(D),而 $E-2\alpha\alpha^T$ 的特征值为 $n-1$ 个 1,一个 -1,则 $|E-2\alpha\alpha^T|\neq 0$.

所以 $E+\alpha\alpha^T, E+2\alpha\alpha^T$ 和 $E-2\alpha\alpha^T$ 都可逆.

例 5 设五阶矩阵 A 满足 $A^2-5A+6E=0$,$\text{rank}(A-2E)=2$,求 A 的所有特征值.

解 设 λ 是 A 的任一特征值,则由 $A^2-5A+6E=0$ 知 $\lambda^2-5\lambda+6=0$,解得 $\lambda=2$ 或 $\lambda=3$,即 A 的特征值只能是 2 或 3.

由 $A^2-5A+6E=0$,知 $(A-2E)(A-3E)=0$,于是

$$\text{rank}(A-2E)+\text{rank}(A-3E)\leqslant 5.$$

而

$$\text{rank}(A-2E)+\text{rank}(A-3E)\geqslant \text{rank}[(A-2E)-(A-3E)]=\text{rank}\,E=5,$$

所以

$$\text{rank}(A-2E)+\text{rank}(A-3E)=5,$$

即 A 的相异特征值的几何重数之和为 5,因此 A 可对角化. 已知 $\text{rank}(A-2E)=2$,故 $\text{rank}(A-3E)=3$,从而 A 的特征值分别为 2,2,2,3,3.

注 设 n 阶矩阵 A 可对角化,则 λ 是 A 的 k 重特征值当且仅当 $\text{rank}(\lambda E-A)=n-k$. 当 A 不可对角化时,矩阵 A 至少存在一个特征值的几何重数小于其代数重数,此时由 $\text{rank}(\lambda E-A)$ 的值无法确定 λ 的代数重数.

例 6 设 A 为 $m\times n$ 矩阵,B 为 $n\times m$ 矩阵,证明 AB 与 BA 有相同的非零特征值.

证 设 λ 是 AB 的任一非零特征值,p 是对应于 λ 的特征向量,则 $ABp=\lambda p$,故

$$BA(Bp)=\lambda(Bp).$$

此时必有 $Bp\neq 0$. 这是因为,假若 $Bp=0$,则 $ABp=0=\lambda p$;而 $\lambda\neq 0$,故 $p=0$,与 $p\neq 0$ 矛盾. 于是 λ 是 n 阶矩阵 BA 的特征值,对应的特征向量为 Bp.

同理可证,BA 的任一非零特征值必是 AB 的非零特征值.

注 尽管 AB 有 m 个特征值,BA 有 n 个特征值,但它们有相同的非零特征值,所不同的是零特征值的个数. 此题也可以由第 3 章范例精讲中例 18 的结论

$$\lambda^n\,|\lambda E_m-AB|=\lambda^m\,|\lambda E_n-BA|$$

即知 AB 与 BA 有相同的非零特征值.

例 7 如果存在正整数 k,使得 $A^k=0$,则称矩阵 A 为幂零矩阵. 证明 A 是幂零矩阵当且仅当 A 的特征值全为零.

证 必要性. 设存在正整数 k,使得 $A^k=0$. 对于 A 的任意特征值 λ,记 p 是与之对应的特征向量,则 $Ap=\lambda p$, $p\neq 0$,因此

$$0=A^kp=\lambda^kp,\quad p\neq 0,$$

于是 $\lambda=0$,即 A 的特征值只能为零.

充分性. 因为 A 的特征值全为零,所以由 Jordan 定理知,存在可逆矩阵 P,使得 $A=PJP^{-1}$,其中 Jordan 标准形 J 可表示为

$$J=\begin{bmatrix} J_{m_1}(0) & & & \\ & J_{m_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_s}(0) \end{bmatrix}$$

且对每个 Jordan 块

$$J_{m_i}(0)=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{bmatrix}_{m_i\times m_i},\quad i=1,2,\cdots,s,$$

有$[J_{m_i}(0)]^{m_i}=0(i=1,2,\cdots,s)$成立. 于是只要取 $k=\max\{m_i\mid 1\leqslant i\leqslant s\}$,便有

$$A^k=PJ^kP^{-1}=P\begin{bmatrix}[J_{m_1}(0)]^k & & & \\ & [J_{m_2}(0)]^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & [J_{m_s}(0)]^k\end{bmatrix}P^{-1}=0.$$

注 矩阵 A 的特征值全为零并不能说明 A 与零矩阵相似,因为不知道 A 能否对角化,但一定存在与 A 相似的 Jordan 标准形.

题型 2 特征值和特征向量的计算

例 8 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2 & 1 & 2\\ 2 & -1 & -2 & 2 & 0\\ 2 & -2 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$的所有特征值.

解 记

$$A=\begin{bmatrix}B & C\\ 0 & D\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\\ 1 & 4\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix},$$

则

$$|\lambda E_5-A|=\begin{vmatrix}\lambda E_3-B & -C\\ 0 & \lambda E_2-D\end{vmatrix}=|\lambda E_3-B||\lambda E_2-D|$$

而

$$|\lambda E_3-B|=(\lambda-1)^2(\lambda+5),\quad |\lambda E_2-D|=(\lambda+1)(\lambda-4),$$

所以

$$|\lambda E_5-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+5)(\lambda+1)(\lambda-4)$$

故 A 的所有特征值为$\lambda_1=-5,\lambda_2=-1,\lambda_3=\lambda_4=1,\lambda_5=4$.

例 9 设 n 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & b & \cdots & b\\ b & 1 & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & \cdots & 1\end{bmatrix}$,求 A 的所有特征值和特征向量.

解 因为

$$|\lambda E-A|=[\lambda-(1+(n-1)b)](\lambda-1+b)^{n-1},$$

所以矩阵 A 的所有特征值为

$$\lambda_1=1+(n-1)b,\quad \lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=1-b.$$

(1) 当 $b=0$ 时,$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$,且 $\boldsymbol{A}$ 为单位矩阵,所以任意非零向量都是特征值 1 对应的特征向量.

(2) 当 $b\neq 0$ 时,对于 $\lambda_1=1+(n-1)b$,由

$$\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}(n-1)b & -b & \cdots & -b\\ -b & (n-1)b & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -b & -b & \cdots & (n-1)b\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}$$

求得齐次方程组$(\lambda_1\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系 $\boldsymbol{p}_1=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$,从而 $\boldsymbol{A}$ 的对应于λ_1 的所有特征向量为 $k_1\boldsymbol{p}_1$,其中 k_1 为任意非零数.

对于 $\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=1-b$,由

$$\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-b & -b & \cdots & -b\\ -b & -b & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -b & -b & \cdots & -b\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

求得齐次方程组$(\lambda_2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系

$$\boldsymbol{p}_2=(1,-1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{p}_3=(1,0,-1,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{p}_n=(1,0,0,\cdots,-1)^{\mathrm{T}},$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 的对应于λ_2 的所有特征向量为 $k_2\boldsymbol{p}_2+k_3\boldsymbol{p}_3+\cdots+k_n\boldsymbol{p}_n$,其中 $k_2,k_3,\cdots,k_n$ 是任意不全为零的数.

注 求 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量的步骤:

(a) 求 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$;

(b) 解特征方程$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,求得 $\boldsymbol{A}$ 的全部相异特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$;

(c) 对于每一个特征值 λ_i,求出齐次线性方程组$(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}(i=1,2,\cdots,m)$的一个基础解系 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_{n-r}$,这里 $r=\mathrm{rank}(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$,则 $\boldsymbol{p}=\sum\limits_{j=1}^{n-r}k_j\boldsymbol{p}_j$ 就是对应于λ_i 的全部特征向量,其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 是任意不全为零的数.

题型 3　矩阵相似的判定与应用

例 10 下列矩阵中,与矩阵 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$相似的是 【 】

(A) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$; (B) $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$;

(C) $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$; (D) $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

解 矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{J}$ 的特征值均为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$,而

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{J})=2,\quad \mathrm{rank}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2,$$
$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=1,\quad \mathrm{rank}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C})=1,\quad \mathrm{rank}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{D})=1.$$

若 $\boldsymbol{A}_1 \sim \boldsymbol{A}_2$,则 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1 \sim \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_2$,故 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_1)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}_2)$,因此矩阵 $\boldsymbol{J}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 都不相似. 所以选(A).

顺便提一下,令 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$.

注 (1) 两个同阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的秩、相同的行列式、相同的特征值、相同的迹;

(2) 判断两矩阵不相似,通常使用上述结论的逆否命题;

(3) 判断两矩阵相似,一般用定义.

例 11 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则下列结论错误的是 【 】

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似; (B) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似;

(C) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似; (D) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

解 因 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,从而

$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},$$
$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^{-1},$$
$$\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1},$$

则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\sim\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$,所以选(C).

例 12 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&&\\&y&\\&&-1\end{bmatrix}$ 相似,求 x,y 及满足 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$ 的正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

解 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,有 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$,$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}$,即

$$\begin{cases}-2=-2y,\\x+2=y+1,\end{cases}$$

解得 $x=0,y=1$. 从而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,1,-1$. 求得对应的特征向量为

$$\boldsymbol{p}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{p}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{p}_3=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}.$$

将其单位化得

$$\boldsymbol{q}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{q}_2=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{q}_3=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},$$

令 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{q}_1\quad \boldsymbol{q}_2\quad \boldsymbol{q}_3]$,则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵,且 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$.

题型 4 矩阵对角化的判定与计算

例 13 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$,则 【 】

(A) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似; (B) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似;

(C) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似; (D) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似,$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

解 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,2,1$,且 $\operatorname{rank}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$,特征值 $\lambda=2$ 的几何重数与代数重数均为 2,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化,即

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=C.$$

由 $|\lambda E-B|=0$ 知 B 的特征值也为 2,2,1,且 $\text{rank}(2E-B)=2$,特征值 $\lambda=2$ 的几何重数为 1,它的代数重数为 2,则矩阵 B 不可对角化,而矩阵 C 是对角矩阵,因此 B 与 C 不相似. 所以选(B).

注 矩阵 A 可对角化的充要条件是 A 的每个相异特征值的几何重数等于代数重数.

例 14 已知 $\lambda=0$ 是矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&2&-2\\-k&1&k\\4&k&-3\end{bmatrix}$ 的特征值,判断 A 能否对角化,并说明理由.

解 由 $\lambda=0$ 是 A 的特征值可知 $|A|=0$. 而 $|A|=-(k-1)^2$,故 $k=1$. 于是

$$|\lambda E-A|=\lambda^2(\lambda-1),$$

所以 $\lambda=0$ 是 A 的特征值,其代数重数为 2. 容易算得

$$\text{rank}(0E-A)=\text{rank}\,A=2,$$

因此 $\lambda=0$ 的几何重数为 1,从而 A 不能对角化.

例 15 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A$,$\text{rank}\,A=r$,证明 A 可对角化,并求 $|A-2E|$.

证 方法 1 设 $A=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_n]$,由 $\text{rank}\,A=r$ 知 A 中有 r 个列向量线性无关,不妨设为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$. 由于 $A^2=A$,即

$$A[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_n]=[\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_n],$$

因此

$$A\alpha_1=\alpha_1,\quad A\alpha_2=\alpha_2,\quad\cdots,\quad A\alpha_r=\alpha_r,$$

即 $\lambda=1$ 为 A 的特征值,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为 A 的对应于 1 的线性无关的特征向量.

因为 $\text{rank}\,A=r$,所以方程组 $Ax=0$ 的基础解系中有 $n-r$ 个向量,这 $n-r$ 个向量为 A 的对应于特征值 0 的特征向量. 从而 A 有 n 个线性无关的特征向量,于是 A 可对角化,即存在可逆矩阵 P,使得

$$P^{-1}AP=\Lambda=\text{diag}(1,\cdots,1,0,\cdots,0),$$

所以

$$|A-2E|=|\Lambda-2E|=(-1)^r(-2)^{n-r}=(-1)^n2^{n-r}.$$

方法 2 由 $A^2=A$ 知,A 的特征值满足 $\lambda^2=\lambda$,即 A 的所有特征值只能为 0 或 1. 又由 $A^2=A$,有 $A(E-A)=0$,于是

$$\text{rank}A+\text{rank}(E-A)\leqslant n.$$

而

$$\text{rank}A+\text{rank}(E-A)\geqslant\text{rank}[A+(E-A)]=\text{rank}E=n,$$

所以

$$\text{rank}A+\text{rank}(E-A)=n.$$

由 $\text{rank}A=r$ 知 $\text{rank}(E-A)=n-r$,则 A 的特征值 0 的几何重数为 $n-r$,特征值 1 的几何重数为 r,即 A 有 n 个线性无关的特征向量,于是 A 可对角化,从而 A 的特征值 0 的代数重数为 $n-r$,A 的特征值 1 的代数重数为 r,从而 $A-2E$ 有 $n-r$ 个特征值为 -2,r 个特征值为

-1,故

$$|A-2E|=(-1)^r(-2)^{n-r}=(-1)^n2^{n-r}.$$

例 16 设 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 为常数,且

$$B=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-2}&-a_{n-1}\end{bmatrix}.$$

(1) 若 λ 为 B 的特征值,证明 $(1,\lambda,\cdots,\lambda^{n-1})^{\mathrm{T}}$ 为 B 的特征向量.

(2) 若 B 有 n 个相异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,求可逆矩阵 P,使得

$$P^{-1}BP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

解 (1) 设 λ 是 B 的特征值,则 $|\lambda E-B|=0$,而

$$|\lambda E-B|=(-1)^{n+1}\left(\lambda^n+\sum_{i=0}^{n-1}a_i\lambda^i\right)(-1)^{n-1},$$

故

$$\lambda^n+\sum_{i=0}^{n-1}a_i\lambda^i=0.$$

令 $p=(1,\lambda,\cdots,\lambda^{n-1})^{\mathrm{T}}$,则有

$$Bp=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-2}&-a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\\lambda\\\vdots\\\lambda^{n-1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda\\\lambda^2\\\vdots\\-\sum_{i=0}^{n-1}a_i\lambda^i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\\\lambda^2\\\vdots\\\lambda^n\end{bmatrix}=\lambda p,$$

因此 p 是 B 的对应于 λ 的特征向量.

(2) 由(1)知

$$p_1=(1,\lambda_1,\cdots,\lambda_1^{n-1})^{\mathrm{T}},\quad p_2=(1,\lambda_2,\cdots,\lambda_2^{n-1})^{\mathrm{T}},\quad\cdots,\quad p_n=(1,\lambda_n,\cdots,\lambda_n^{n-1})^{\mathrm{T}}$$

依次是 B 的对应于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量.

令 $P=[p_1\quad p_2\quad\cdots\quad p_n]$,因为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是 B 的相异特征值对应的特征向量,所以 P 可逆,并且 $P^{-1}BP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

注 将 n 阶矩阵 A 相似对角化的一般步骤如下:

(a) 求出 A 的所有相异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$.

(b) 对每一个特征值 λ_i,求出齐次线性方程组 $(\lambda_iE-A)x=0\,(i=1,2,\cdots,m)$ 的一个基础解系,即得 A 的对应于 λ_i 的 s_i 个线性无关的特征向量.

(c) 若 $s_1+s_2+\cdots+s_m=n$,则将以上得到的 n 个线性无关的特征向量为列构造相似变

换矩阵 $\boldsymbol{P}$，其中 $\boldsymbol{P}$ 中第 j 个列向量必须是对角矩阵的第 j 个主对角元(即特征值)对应的特征向量；否则 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化.

例 17 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]$有三个不同的特征值，且$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(1) 证明 $\text{rank}\boldsymbol{A}=2$；

(2) 设$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解 (1) 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值，所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，且 $\text{rank}\boldsymbol{A}\geqslant 2$. 又$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，从而 $\text{rank}\boldsymbol{A}<3$，故 $\text{rank}\boldsymbol{A}=2$.

(2) 由 $\text{rank}\boldsymbol{A}=2$ 知，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只有一个解向量. 而$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 即$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，故 $(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系；又由$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 知 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的解，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$k(1,2,-1)^{\mathrm{T}}+(1,1,1)^{\mathrm{T}},\quad k \text{ 为任意数}.$$

题型 5 实对称矩阵的对角化

例 18 矩阵 $\begin{bmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ 相似的充分必要条件为 【 】

(A) $a=0,b=2$； (B) $a=0,b$ 为任意数；

(C) $a=2,b=0$； (D) $a=2,b$ 为任意数.

解 因 2 是矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ 的特征值，故也是 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{bmatrix}$ 特征值，从而

$$0=|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&-a&-1\\-a&2-b&-a\\-1&-a&1\end{vmatrix}=-4a^2,$$

得 $a=0$. 由此易知矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值均为 $2,0,b$，即知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似与 b 无关，所以选(B).

注 两同阶实对称矩阵相似的充要条件是它们有相同的特征值.

例 19 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有解但不唯一.

(1) 求 a 的值；

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 正交相似对角化.

解 (1) 由题设知$|\boldsymbol{A}|=0$，而$|\boldsymbol{A}|=-(a+2)(a-1)^2$，故 $a=1$ 或 $a=-2$.

当 $a=1$ 时，$\text{rank}\,\boldsymbol{A}<\text{rank}[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta}]$，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 无解；

当 $a=-2$ 时，$\text{rank}\,\boldsymbol{A}=\text{rank}[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta}]<3$，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解，所以$a=-2$.

(2) 由$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda+3)(\lambda-3)=0$，求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=-3,\lambda_3=3$.

方程组$(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{p}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，即知 $\boldsymbol{p}_1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 λ_1 对应的特征向量；

方程组$(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{p}_2=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$，即知 $\boldsymbol{p}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 λ_2 对应的特征向量；

方程组$(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系为$\boldsymbol{p}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$,即知$\boldsymbol{p}_3$为$\boldsymbol{A}$的$\lambda_3$对应的特征向量.

因为$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵,所以$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$两两正交,将它们单位化,得

$$\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{p}_1,\quad \boldsymbol{q}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{p}_2,\quad \boldsymbol{q}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{p}_3,$$

令$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{q}_1\quad \boldsymbol{q}_2\quad \boldsymbol{q}_3]$,则$\boldsymbol{Q}$为正交矩阵,且

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(0,-3,3).$$

注 n阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$正交相似对角化的步骤如下:

(a) 求出$\boldsymbol{A}$的全部互异特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$及其代数重数$s_1,s_2,\cdots,s_m$.

(b) 对每一个特征值λ_i,解齐次线性方程组$(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,求出它的一个基础解系,将其标准正交化,就得$\boldsymbol{A}$的对应于$\lambda_i$的$s_i$个两两正交的单位特征向量.

(c) 以上述$s_1+s_2+\cdots+s_m=n$个两两正交的单位特征向量为列构造正交矩阵$\boldsymbol{Q}$.

例 20 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&a&2\\0&0&2&1\end{bmatrix}$有一个特征值为2,求一个正交矩阵$\boldsymbol{Q}$,使$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$为对角矩阵.

解 因为2是$\boldsymbol{A}$的特征值,所以$|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,而$|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=-3(2+a)$,故$a=-2$.

记$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}-2&2\\2&1\end{bmatrix}$,则$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}$.

令$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=0$,得$\boldsymbol{B}$的特征值$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$,求得对应的特征向量

$$\boldsymbol{p}_1=(1,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{p}_2=(1,-1)^{\mathrm{T}}.$$

取

$$\boldsymbol{P}_1=\left[\frac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|}\quad \frac{\boldsymbol{p}_2}{\|\boldsymbol{p}_2\|}\right]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},$$

则$\boldsymbol{P}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$.

同理得到正交矩阵$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$,使得$\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}2&0\\0&-3\end{bmatrix}$.

取正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_1&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{P}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\\0&0&\frac{1}{\sqrt{5}}&-\frac{2}{\sqrt{5}}\\0&0&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix},$$

则

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{P}_2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{P}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 2 & \\ & & & -3\end{bmatrix}.$$

注 本题给出了将实分块对角矩阵正交相似对角化的一种方法.

例 21 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}8 & -2 & -2\\ -2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{bmatrix}$,求实对称矩阵 $\boldsymbol{B}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

解 因 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-9)^2$,故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 9,9,0. 且 $\lambda=9$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{p}_2=(-2,0,1)^{\mathrm{T}}$;$\lambda=0$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{p}_1\quad \boldsymbol{p}_2\quad \boldsymbol{p}_3]$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(9,9,0)$,从而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}9 & & \\ & 9 & \\ & & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},$$

取

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}8 & -2 & -2\\ -2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{bmatrix},$$

则有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

注 类似地还可以求实对称矩阵 $\boldsymbol{B}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^k$,其中 k 为正整数. 不过当 k 为偶数时,要求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值非负.

例 22 证明矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & n\end{bmatrix}$ 相似.

证 因为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-n)\lambda^{n-1},$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1=n,\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$. 而 $\boldsymbol{A}$ 是一个实对称矩阵,故 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化,即

$$\boldsymbol{A}\sim\mathrm{diag}(n,0,\cdots,0).$$

由于

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-n)\lambda^{n-1},$$

因此 $\boldsymbol{B}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1=n,\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$. 易知 $\mathrm{rank}(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=1$,故 $\boldsymbol{B}$ 的 $n-1$ 重特征值 0 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量,所以 $\boldsymbol{B}$ 也可以相似对角化,且

$$\boldsymbol{B}\sim\mathrm{diag}(n,0,\cdots,0),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

注 设 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,若 $\boldsymbol{B}$ 可对角化,则 $\boldsymbol{A}$ 也可对角化.

题型6 由矩阵的特征值和特征向量反求矩阵

例 23 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵，$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2$，且 $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{bmatrix}$. 求：

(1) $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值和特征向量；

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解 (1) 由于 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2$，因此 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值. 又

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},$$

故 -1 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，对应的特征向量为 $k_1\boldsymbol{p}_1$，其中 $\boldsymbol{p}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$k_1$ 为任意非零数；1 也是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，对应的特征向量为 $k_2\boldsymbol{p}_2$，其中 $\boldsymbol{p}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$k_2$ 为任意非零数.

设对应于特征值 0 的特征向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，所以 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 正交，即

$$\begin{cases}x_1-x_3=0,\\x_1+x_3=0,\end{cases}$$

从而解得特征值 0 对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}=k_3\boldsymbol{p}_3$，其中 $\boldsymbol{p}_3=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$k_3$ 为任意非零数.

(2) 令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{p}_1\quad\boldsymbol{p}_2\quad\boldsymbol{p}_3]$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(-1,1,0)$，于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(-1,1,0)\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

例 24 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=8,\lambda_2=\lambda_3=2$，且 $\lambda_1=8$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(1,a,1)^{\mathrm{T}}$，$\lambda_2=\lambda_3=2$ 对应的一个特征向量为 $\boldsymbol{p}_2=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 求：

(1) 参数 a 及特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 对应的另一个线性无关的特征向量；

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解 (1) 因 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，故 $\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_2=0$，即 $1+a+1=0$，得 $a=-2$.

设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 对应的另一个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_3=0,\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_3=0$，即

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0,\\x_1+x_2+x_3=0,\end{cases}$$

解得该方程组的基础解系为 $\boldsymbol{p}_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

(2) 令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{p}_1\quad\boldsymbol{p}_2\quad\boldsymbol{p}_3]$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(8,2,2)$，从而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\operatorname{diag}(8,2,2)\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}3&-2&1\\-2&6&-2\\1&-2&3\end{bmatrix}.$$

注 设 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量反求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的步骤如下：

(a) 由题设确定 $\boldsymbol{A}$ 的全部互异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 及其代数重数 $s_1,s_2,\cdots,s_m$.

(b) 确定每个特征值对应的特征向量，由线性无关的特征向量构造可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

(c) $A=P\Lambda P^{-1}$，其中Λ是主对角元为A的特征值的对角矩阵.

当A为实对称矩阵时，还可以通过以下步骤求矩阵A：

(a) 求出A的全部互异的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$及其代数重数$s_1,s_2,\cdots,s_m$.

(b) 对每一个特征值λ_i对应的线性无关的特征向量标准正交化，得A的对应于λ_i的s_i个两两正交的单位特征向量$(i=1,2,\cdots,m)$，由此构造正交矩阵Q.

(c) $A=Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$，其中$\Lambda$是主对角元为$A$的特征值的对角矩阵.

题型 7　利用相似矩阵计算矩阵的幂

例 25　设数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$满足

$$\begin{cases} x_n = 2x_{n-1} - y_{n-1}, \\ y_n = \dfrac{3}{2}x_{n-1} - \dfrac{1}{2}y_{n-1}, \end{cases}$$

且$x_0=-1$，$y_0=1$，试求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

解　由已知条件得

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

记$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$，则$A$的特征值为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=\dfrac{1}{2}$，对应的特征向量依次为$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. 令$P=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$，则

$$A^n = P\Lambda^n P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \\ & \dfrac{1}{2^n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\dfrac{2}{2^n} & -2+\dfrac{2}{2^n} \\ 3-\dfrac{3}{2^n} & -2+\dfrac{3}{2^n} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\dfrac{2}{2^n} & -2+\dfrac{2}{2^n} \\ 3-\dfrac{3}{2^n} & -2+\dfrac{3}{2^n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5+\dfrac{4}{2^n} \\ -5+\dfrac{6}{2^n} \end{bmatrix},$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-5$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=-5$.

例 26　设三阶矩阵A的特征值为$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=3$，对应的特征向量依次为$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,9)^{\mathrm{T}}$，向量$\boldsymbol{\beta}=(1,1,3)^{\mathrm{T}}$，求$A^n\boldsymbol{\beta}$.

解　由题设知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$唯一线性表示. 对矩阵$[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}]$做初等行变换，得

$$[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

从而$\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$. 令$P=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3]$，则

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

于是

$$A=P\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}P^{-1},\quad P^{-1}\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix},$$

故

$$A^n\boldsymbol{\beta}=P\begin{bmatrix}1&&\\&2^n&\\&&3^n\end{bmatrix}P^{-1}\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{bmatrix}.$$

例 27 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

(1) 求 A^{99};

(2) 设三阶矩阵 $B=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]$满足 $B^2=BA$,记 $B^{100}=[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3]$,将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$分别表示为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的线性组合.

解 (1) 由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2),$$

得矩阵 A 的特征值 $0,-1,-2$,对应的特征向量依次为$(3,2,2)^T,(1,1,0)^T,(1,2,0)^T$. 令 $P=\begin{bmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{bmatrix}$,则

$$P^{-1}AP=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2\end{bmatrix},$$

因此

$$A^{99}=P\boldsymbol{\Lambda}^{99}P^{-1}=\begin{bmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

(2) 因为 $B^2=BA$,所以 $B^{100}=BA^{99}$,从而

$$[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{bmatrix},$$

即

$$\boldsymbol{\beta}_1=(2^{99}-2)\boldsymbol{\alpha}_1+(2^{100}-2)\boldsymbol{\alpha}_2,$$
$$\boldsymbol{\beta}_2=(1-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2^{100})\boldsymbol{\alpha}_2,$$
$$\boldsymbol{\beta}_3=(2-2^{98})\boldsymbol{\alpha}_1+(2-2^{99})\boldsymbol{\alpha}_2.$$

同步练习

1. 填空题

(1) 已知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$，则 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=$________.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为四阶方阵，满足条件 $|8\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{E}$，$|\boldsymbol{A}|<0$，则 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值为________.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，若 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 λ_0，对应于 λ_0 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量为________.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的二维列向量，$\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为________.

(5) 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,0,1$，矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-4\boldsymbol{A}^2$，则 $|\boldsymbol{B}+4\boldsymbol{E}|=$________.

(6) 已知 $\lambda=2$ 是三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量，$\boldsymbol{\beta}=(-1,2,-2)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A\beta}=$________.

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1=(a,-a,1)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，$\boldsymbol{\alpha}_2=(a,1,1-a)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，则常数 $a=$________.

(8) 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值互不相同，若行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 的秩为________.

(9) 若三维向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2$，则矩阵 $\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为________.

(10) 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$ 的非零特征值为________.

2. 单选题

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个两两正交的特征向量是 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵的　　【　】

(A) 充分条件；　　(B) 必要条件；

(C) 充要条件；　　(D) 既非充分也非必要条件.

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-1,2)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&2\\1&b&a\\1&a&3\end{bmatrix}$ 的一个特征向量，则 a，b 的值为　　【　】

(A) 1，6；　　(B) -3，0；　　(C) 0，-3；　　(D) 1，-3.

(3) 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,1,2$，它们对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$，令 $\boldsymbol{P}=[2\boldsymbol{p}_2\quad \boldsymbol{p}_1\quad 3\boldsymbol{p}_3]$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为　　【　】

(A) $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&6\end{bmatrix}$；　　(B) $\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{bmatrix}$；

(C) $\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$；　　(D) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

(4) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列说法错误的是 【 】

(A) $\boldsymbol{A}^*$ 与 $\boldsymbol{B}^*$ 相似； (B) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似；

(C) $\boldsymbol{A}^k$ 与 $\boldsymbol{B}^k$ 相似(k 为正整数)； (D) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$.

(5) 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,1,2，且 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2$，则 $\boldsymbol{B}$ 的秩为 【 】

(A) 1； (B) 2；

(C) 3； (D) 条件不够不能确定.

(6) 下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是 【 】

(A) $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&3\end{bmatrix}$； (B) $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$；

(C) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$； (D) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&2\end{bmatrix}$.

(7) 设 λ_1,λ_2 是三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_1 的线性无关的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ_2 的特征向量，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关的充要条件是 【 】

(A) $\lambda_1=0$ 或 $\lambda_1\lambda_2=1$； (B) $\lambda_2=0$ 或 $\lambda_1\lambda_2=1$；

(C) $\lambda_1\neq0$ 或 $\lambda_1\lambda_2\neq1$； (D) $\lambda_2\neq0$ 或 $\lambda_1\lambda_2\neq1$.

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 为四阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，rank $\boldsymbol{A}=3$，则 $\boldsymbol{A}$ 相似于 【 】

(A) $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{bmatrix}$； (B) $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$；

(C) $\begin{bmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$； (D) $\begin{bmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{bmatrix}$.

(9) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，$n$ 为正整数，则 $\det(a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n)$ 为 【 】

(A) $a-2^n$； (B) $a^2(a-2^n)$； (C) a^2-2； (D) 0.

(10) 设 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_4]$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,3,4)$ 是四维列向量. 已知齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(-2,0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 2 的特征向量，则以下命题中不正确的是 【 】

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关； (B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\eta}$ 线性无关；

(C) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关； (D) $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\eta}$ 线性无关.

3. 求下列矩阵的特征值和特征向量，并判断它们可否对角化. 若可对角化，则求相似变换矩阵.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&-1&0&0\\1&1&0&0\\-2&4&5&-3\\7&5&3&-1\end{bmatrix}.$$

4. 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,3,5,求行列式 $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|$ 和 $|\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{E}|$.

5. 设三阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$, $|\boldsymbol{A}^*|=144$,求 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值.

6. 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{2\times2}$, $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$,且 $|\boldsymbol{A}|<0$,证明 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ x & 1 & y\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 可对角化,试确定 x,y 之间的关系.

8. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & b\\ 1 & b & 1\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$ 相似,求一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$.

9. 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,1,1, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征向量,且 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_2$.

(1) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=0$;

(2) 求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_2$ 的通解.

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别对应于特征值 $-1,1$ 的特征向量,向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,证明

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(2) 令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]$,求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

11. 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 1,且 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值对应的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$. 求:

(1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值;

(2) $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 0 的特征向量;

(3) $\boldsymbol{A}$.

12. 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=i\boldsymbol{\alpha}_i\,(i=1,2,3)$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,-1,2)^{\mathrm{T}}$. 求 $\boldsymbol{A}^n$.

13. 设三阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,1,1$, $\boldsymbol{p}=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$ 为对应于 -1 的特征向量,求 $\boldsymbol{A}^n$.

14. 设 $n(n>4)$ 阶矩阵的 4 个不同特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$,其对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$,记 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$,证明: $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

15. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实矩阵, $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为反对称矩阵,证明 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|>0$.

习题选解

(A)

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, n 为正整数,计算 $|a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|$.

解 由于

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=2,\quad \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}(1,0,-1)=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

因此

$$A^n = (\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T)\cdots(\alpha\alpha^T) = 2^{n-1}\alpha\alpha^T = 2^{n-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$|aE - A^n| = \begin{vmatrix} a-2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & a & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & a-2^{n-1} \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a-2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & a-2^{n-1} \end{vmatrix} = a^2(a-2^n).$$

12. 设 A 为二阶矩阵，α_1,α_2 为线性无关的二维列向量，且 $A\alpha_1=0, A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，求 A 的全部特征值.

证 由 α_1,α_2 线性无关知$\alpha_1\neq 0$，而 $A\alpha_1=0=0\cdot\alpha_1$，故 0 是 A 的一个特征值.

因为 $A\alpha_1=0, A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$，所以

$$A(2\alpha_1+\alpha_2) = 2A\alpha_1 + A\alpha_2 = 0+(2\alpha_1+\alpha_2) = 2\alpha_1+\alpha_2.$$

又由α_1,α_2 线性无关知 $2\alpha_1+\alpha_2\neq 0$，因此 1 是 A 的另一个特征值.

14. 设 A 为 n 阶正交矩阵，且$|A|<0$，求$(A^{-1})^*$ 的一个特征值.

解 由 A 为正交矩阵及$|A|<0$ 可知$|A|=-1$，从而$|A^{-1}|=-1$. 因为

$$|-E-A| = |-AA^T-A| = |A||-A^T-E| = (-1)^{n+1}|A^T+E|,$$

且

$$|-E-A| = (-1)^n|E+A| = (-1)^n|(E+A)^T| = (-1)^n|A^T+E|,$$

所以比较上述两式可得$|A^T+E|=0$，于是$|-E-A|=0$，即 A 的一个特征值为-1，故 A^{-1} 的一个特征值为-1，因此$(A^{-1})^*$ 的一个特征值为 1.

15. 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，且向量 $\alpha=\begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}$是 A^{-1}的特征向量，求常数 k.

解 因 α 是A^{-1}的特征向量，设 A^{-1}的与α对应的特征值为λ，故 $A^{-1}\alpha=\lambda\alpha$，从而 $A\alpha=\lambda^{-1}\alpha$，即

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix},$$

于是 $2k+2=k(k+3)$，解得 $k=1$ 或 $k=-2$.

16. 已知三阶矩阵 A 和三维向量 x，使得向量组 x, Ax, A^2x 线性无关，且满足 $A^3x=3Ax-2A^2x$.

(1) 记 $P=[x \quad Ax \quad A^2x]$，求三阶矩阵 B，使得 $A=PBP^{-1}$；

(2) 计算行列式$|A+E|$.

解 (1) 由于

$$\begin{aligned} AP &= A[x \quad Ax \quad A^2x] = [Ax \quad A^2x \quad A^3x] \\ &= [Ax \quad A^2x \quad 3Ax-2A^2x] \\ &= [x \quad Ax \quad A^2x]\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

因此取

$$B=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&3\\0&1&-2\end{bmatrix},$$

此时有 $A=PBP^{-1}$.

(2) 由(1)的结论得

$$|A+E|=|PBP^{-1}+PP^{-1}|=|B+E|=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&3\\0&1&-1\end{vmatrix}=-4.$$

17. 设 A 是二阶实矩阵.

(1) 若 $|A|<0$,则 A 与对角矩阵是否相似?

(2) 若 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, $ad-bc=1$, $|a+d|>2$,则 A 是否可对角化?

解 设 A 的两个特征值为 λ_1,λ_2.

(1) 由 $|A|=\lambda_1\lambda_2<0$ 知 $\lambda_1\neq\lambda_2$,因此 A 与对角矩阵相似.

(2) 因为

$$\lambda_1\lambda_2=|A|=ad-bc=1,\quad |\lambda_1+\lambda_2|=|\mathrm{tr}A|=|a+d|>2,$$

所以 $\lambda_1\neq\lambda_2$,于是 A 与对角矩阵相似.

18. 已知 $p=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ 是 $A=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$ 的一个特征向量.

(1) 试确定参数 a,b 及特征向量 p 所对应的特征值;

(2) 矩阵 A 能否对角化? 说明理由.

解 (1) 设与 p 对应的特征值为 λ_0,则 $Ap=\lambda_0 p$,即

$$\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\lambda_0\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix},$$

解得 $\lambda_0=-1$, $a=-3$, $b=0$.

(2) 因为 $|\lambda E-A|=(\lambda+1)^3$,所以 A 有三重特征值 -1. 而 $-E-A\neq 0$,故 $3-\mathrm{rank}(-E-A)<3$,即 -1 的几何重数小于其代数重数,因此 A 不可对角化.

20. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&a&-3\\-1&4&-3\\1&-2&5\end{bmatrix}$ 有重特征值,判断 A 能否相似对角化,并说明理由.

解 因为 A 有重特征值,而

$$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+10+a),$$

所以,或者 $\lambda^2-8\lambda+10+a=0$ 有一个根为 2,或者 $\lambda^2-8\lambda+10+a$ 可写成平方项的形式,从而解得 $a=2$ 或者 $a=6$.

当 $a=2$ 时,有二重特征值 2,因 $\mathrm{rank}(2E-A)=1$,故几何重数等于代数重数,所以 A 能对角化.

当 $a=6$ 时,有二重特征值 4,因 $\mathrm{rank}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$,故几何重数小于代数重数,于是 $\boldsymbol{A}$ 不能对角化.

21. 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,且 λ_1,λ_2 所对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{p}_1=(1,a,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{p}_2=(a,a+1,1)^{\mathrm{T}}$,求 λ_3 所对应的特征向量 $\boldsymbol{p}_3$.

解 设 $\boldsymbol{p}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,因为 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值对应的特征向量,所以两两正交,即 $\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_2=0$,$\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_3=0$,$\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_3^{\mathrm{T}}=0$,亦即

$$\begin{cases} a+a(a+1)+1=0, \\ x_1+ax_2+x_3=0, \\ ax_1+(a+1)x_2+x_3=0, \end{cases}$$

解得 $a=-1$,$\boldsymbol{p}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=k(1,2,1)^{\mathrm{T}}$,$k$ 为任意非零数.

22. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量,且 2 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值,试求 x,y 及可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量,2 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值,所以对应于 2 有两个线性无关的特征向量,故 $\mathrm{rank}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$,即 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 所有行成比例,得 $x=2,y=-2$. 从而 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)$,因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$,解 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得基础解系 $\boldsymbol{p}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{p}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

对于 $\lambda_3=6$,解 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得基础解系 $\boldsymbol{p}_3=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1\right)^{\mathrm{T}}$.

记 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{p}_1\quad \boldsymbol{p}_2\quad \boldsymbol{p}_3]$,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

23. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,$n\geqslant 2$,计算 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}$.

解 易知 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-2)^2$,从而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,2,2. 又因 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,故存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(0,2,2)$,所以

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{Q}(\mathrm{diag}(0,2,2))^n\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}(0,2^n,2^n)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},$$

$$2\boldsymbol{A}^{n-1}=2\boldsymbol{Q}(\mathrm{diag}(0,2,2))^{n-1}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}(0,2^n,2^n)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},$$

因此 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{0}$.

24. 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,2,3,特征值 1,2 对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{p}_1=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{p}_2=(1,-2,-1)^{\mathrm{T}}$. 求 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^n$.

解 设特征值 3 所对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$,则由 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵可知 $\boldsymbol{p}_3$ 与 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 正交,即

$$\begin{cases} -x-y+z=0, \\ x-2y-z=0, \end{cases}$$

解得基础解系 $\boldsymbol{p}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$. 记 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{p}_1\quad \boldsymbol{p}_2\quad \boldsymbol{p}_3]$,则

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

从而

$$A=P\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{13}{6}&-\frac{1}{3}&\frac{5}{6}\\-\frac{1}{3}&\frac{5}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{5}{6}&\frac{1}{3}&\frac{13}{6}\end{bmatrix},$$

$$A^n=P\begin{bmatrix}1&&\\&2^n&\\&&3^n\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2^{n-1}+1}{3}+\frac{3^n}{2}&\frac{1-2^n}{3}&-\frac{2^{n-1}+1}{3}+\frac{3^n}{2}\\\frac{1-2^n}{3}&\frac{2^{n+1}+1}{3}&\frac{2^n-1}{3}\\-\frac{2^{n-1}+1}{3}+\frac{3^n}{2}&\frac{2^n-1}{3}&\frac{2^{n-1}+1}{3}+\frac{3^n}{2}\end{bmatrix}.$$

(B)

25. 设 $A\sim B,C\sim D$,证明 $\begin{bmatrix}A&0\\0&C\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}B&0\\0&D\end{bmatrix}$.

解 由 $A\sim B$ 知存在可逆矩阵 P,使得 $A=PBP^{-1}$;由 $C\sim D$ 知存在可逆矩阵 Q,使得 $C=QDQ^{-1}$. 从而

$$\begin{bmatrix}A&0\\0&C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}PBP^{-1}&0\\0&QDQ^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P&0\\0&Q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B&0\\0&D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P&0\\0&Q\end{bmatrix}^{-1},$$

于是

$$\begin{bmatrix}A&0\\0&C\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}B&0\\0&D\end{bmatrix}.$$

26. 设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $1,2,-2$,$p_1=(1,-1,1)^T$ 是 A 的对应于 1 的一个特征向量,记 $B=A^5-4A^3+E$. 求:

(1) B 的特征值和特征向量;

(2) B.

解 (1) 易知,B 的全部特征值为 $-2,1,1$;p_1 是 B 的对应于 -2 的特征向量. 于是 B 的对应于 -2 的全部特征向量为 k_1p_1,k_1 为非零数.

显然,B 为实对称矩阵,因此 B 的对应于 1 的任一特征向量 $p=(x_1,x_2,x_2)^T$ 都与 p_1 正交,即有 $x_1-x_2+x_3=0$,解得基础解系 $p_2=(1,1,0)^T$,$p_3=(-1,0,1)^T$,从而 B 的对应于 1 的全部特征向量为 $k_2p_2+k_3p_3$,k_2,k_3 为非零数.

(2) 令 $P=[p_1\quad p_2\quad p_3]$,则

$$B=P\mathrm{diag}(-2,1,1)P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{bmatrix}.$$

27. 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 和 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 为两个非零向量,且 $\alpha^T\beta=0$,记矩阵 $A=\alpha\beta^T$,计算 A^2,并求 A 的特征值和特征向量.

解 因 $\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=0$,故

$$A^2=\alpha\beta^T\alpha\beta^T=\alpha(\alpha^T\beta)\beta^T=0.$$

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值,$\boldsymbol{p}$ 为对应于 λ 的一个特征向量,则

$$\boldsymbol{Ap}=\lambda\boldsymbol{p},\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{p}=\lambda^2\boldsymbol{p}.$$

由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$ 知 $\lambda^2\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$,而 $\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}$,故 $\lambda=0$,即 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 0.

由于 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$,因此不妨设 $a_1\neq0,b_1\neq0$. 解方程 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得基础解系

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}-\frac{b_2}{b_1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}-\frac{b_3}{b_1}\\0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad\cdots,\quad \boldsymbol{p}_{n-1}=\begin{bmatrix}-\frac{b_n}{b_1}\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 0 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{p}_{n-1}$,$k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$ 是不全为零的任意数.

28. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,求 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值与特征向量.

解 因为

$$\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{P},$$

所以 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}$ 有相同的特征值,而且,若 $\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}$ 的对应于特征值 λ 的特征向量,则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{p}$ 是 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的对应于 λ 的特征向量.

容易求得 $|\boldsymbol{A}|=7$,$\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=7$.

解 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得基础解系 $\boldsymbol{p}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{p}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$,因此 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的所有特征向量为 $k_1\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{p}_2$,$k_1,k_2$ 是不全为零的任意数.

解 $(7\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,得基础解系 $\boldsymbol{p}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,因此 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_3=7$ 的所有特征向量为 $k_3\boldsymbol{p}_3$,k_3 为任意非零数.

于是,$\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}$ 的全部特征值为

$$|\boldsymbol{A}|\lambda_j^{-1}+2=7\lambda_j^{-1}+2,\quad j=1,2,3,$$

即 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的全部特征值为 9,9,3. 并且 $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的对应于 9 的所有特征向量为

$$k_1\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{p}_2=k_1(-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,1,-1)^{\mathrm{T}},\quad k_1,k_2\text{ 是不全为零的任意数;}$$

对应于 3 的所有特征向量为

$$k_3\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{p}_3=k_3(0,1,1)^{\mathrm{T}},\quad k_3\text{ 为任意非零数.}$$

29. 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 每一行各元之和均为 3,$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解. 求:

(1) $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(2) 正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$;

(3) $\boldsymbol{A}$ 及 $\left(\boldsymbol{A}-\frac{3}{2}\boldsymbol{E}\right)^6$.

解 (1) 因 $\boldsymbol{A}$ 每一行各元之和均为 3,故

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

即 A 有一个特征值为 3，对应的特征向量为 $\alpha_3=(1,1,1)^T$.

又 $A\alpha_1=0, A\alpha_2=0$，且 α_1,α_2 线性无关，故 A 有二重特征值 0，α_1,α_2 就是对应的两个线性无关的特征向量.

(2) 对 α_1,α_2 进行标准正交化，对 α_3 进行单位化，得

$$q_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix},\quad q_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\quad q_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

令 $Q=[q_1\quad q_2\quad q_3]$，$\Lambda=\mathrm{diag}(0,0,3)$，则有 $Q^TAQ=\Lambda$.

(3) 由(2)知

$$A=Q\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{bmatrix}Q^T=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},$$

$$\left(A-\frac{3}{2}E\right)^6=\left(Q\Lambda Q^T-\frac{3}{2}QQ^T\right)^6=Q\left(\Lambda-\frac{3}{2}E\right)^6Q^T$$
$$=Q\left(\frac{729}{64}E\right)Q^T=\frac{729}{64}E.$$

30. 设向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 与 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 正交，求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a_1+b_1&a_1+b_2&\cdots&a_1+b_n\\a_2+b_1&a_2+b_2&\cdots&a_2+b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n+b_1&a_n+b_2&\cdots&a_n+b_n\end{bmatrix}$$

的 n 个特征值.

解 因为

$$A=\begin{bmatrix}a_1+b_1&a_1+b_2&\cdots&a_1+b_n\\a_2+b_1&a_2+b_2&\cdots&a_2+b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n+b_1&a_n+b_2&\cdots&a_n+b_n\end{bmatrix}\xrightarrow[i=1,2,\cdots,n-1]{r_i-r_n}$$
$$\begin{bmatrix}a_1-a_n&a_1-a_n&\cdots&a_1-a_n\\a_2-a_n&a_2-a_n&\cdots&a_2-a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n+b_1&a_n+b_2&\cdots&a_n+b_n\end{bmatrix},$$

所以 $|A|=0$，故 A 有一个特征值为 $\lambda_1=0$.

显然 $\mathrm{rank}(0E-A)\leqslant 2$，即特征值 $\lambda_1=0$ 的几何重数不小于 $n-2$，故代数重数不小于 $n-2$，即 A 至少有 $n-2$ 个特征值为 0.

又由 α 与 β 正交有 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=0$，于是

$$A\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1(a_1+b_1)+a_2(a_1+b_2)+\cdots+a_n(a_1+b_n)\\a_1(a_2+b_1)+a_2(a_2+b_2)+\cdots+a_n(a_2+b_n)\\\vdots\\a_1(a_n+b_1)+a_2(a_n+b_2)+\cdots+a_n(a_n+b_n)\end{bmatrix}$$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix},$$

即 $\boldsymbol{A}$ 有一个特征值为 $a_1+a_2+\cdots+a_n$.

根据 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-(a_1+b_1) & -(a_1+b_2) & \cdots & -(a_1+b_n)\\-(a_2+b_1) & \lambda-(a_2+b_2) & \cdots & -(a_2+b_n)\\\vdots & \vdots & & \vdots\\-(a_n+b_1) & -(a_n+b_2) & \cdots & \lambda-(a_n+b_n)\end{vmatrix}$$

可知,λ^{n-1}项只包含在$(\lambda-(a_1+b_1))(\lambda-(a_2+b_2))\cdots(\lambda-(a_n+b_n))$中,从而 λ^{n-1} 的系数为 $-(a_1+b_1)-(a_2+b_2)-\cdots-(a_n+b_n)$.

前面至少可以确定 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 个特征值,设 $\boldsymbol{A}$ 的最后一个特征值为 λ_n,则

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^{n-2}(\lambda-(a_1+a_2+\cdots+a_n))(\lambda-\lambda_n),$$

比较上式两边 λ^{n-1}的系数,可得 $\lambda_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-2}=0,\quad \lambda_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_n,\quad \lambda_n=b_1+b_2+\cdots+b_n.$$

31. 已知二维非零向量 $\boldsymbol{x}$ 不是二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax}$ 线性无关;

(2) 若 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax}$ 满足方程 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{Ax}-6\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值和特征向量,并由此判断 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化,若能,请写出对角矩阵.

解 (1) 设 $k_1\boldsymbol{x}+k_2\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$,则必有 $k_2=0$. 若不然,有 $\boldsymbol{Ax}=-\dfrac{k_1}{k_2}\boldsymbol{x}$,从而 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值$-\dfrac{k_1}{k_2}$的特征向量,与题设矛盾. 由此有 $k_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 因 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,故$k_1=0$,这说明 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax}$ 线性无关.

(2) 由 $\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{Ax}-6\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}$,得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=-3(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x},$$

因为 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{Ax}$ 线性无关,所以$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,即$-3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$\boldsymbol{A}$ 的对应于-3 的特征向量为 $c_1(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}$,$c_1$ 为任意非零数. 同理,2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$\boldsymbol{A}$ 的对应于 2 的特征向量为 $c_2(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}$,$c_2$ 为任意非零数.

由于 $\boldsymbol{A}$ 有两个相异特征值,因此 $\boldsymbol{A}$ 可对角化,即

$$\boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix}-3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}.$$

32. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶非零矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$,证明 $\lambda=-1$ 必是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值;若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 分别是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 $\lambda=-1$ 的特征向量,证明 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 线性

无关.

证 如果$\lambda=-1$不是$\boldsymbol{A}$的特征值,则$|-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\neq 0$,即$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$为可逆矩阵.由$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$有$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$,从而推出$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$,与$\boldsymbol{A}$为非零矩阵矛盾.同理可证$\lambda=-1$是$\boldsymbol{B}$的特征值.

假如$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$线性相关,则$k\neq 0$,使得$\boldsymbol{p}_1=k\boldsymbol{p}_2$.而$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=-\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{B}\boldsymbol{p}_2=-\boldsymbol{p}_2$,所以

$$k\boldsymbol{p}_1=-k\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{0},$$

因$\boldsymbol{p}_1\neq\boldsymbol{0}$,故$k=0$,此为矛盾,于是$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$线性无关.

33. 设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$,证明$\boldsymbol{A}$可对角化.

解 设λ为$\boldsymbol{A}$的任一特征值,则由$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$有$\lambda^2-3\lambda+2=0$,解得$\lambda_1=1,\lambda_2=2$.从而$\boldsymbol{A}$的特征值为1或2.

(1) 1是$\boldsymbol{A}$的特征值,2不是$\boldsymbol{A}$的特征值.此时$|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\neq 0$,故$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$可逆.由$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$有$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$,因此$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$,即$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,所以$\boldsymbol{A}$可对角化.

(2) 2是$\boldsymbol{A}$的特征值,1不是$\boldsymbol{A}$的特征值.同理可得$\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$,即$\boldsymbol{A}$可对角化.

(3) 1和2都是$\boldsymbol{A}$的特征值.由于$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$,因此

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\leqslant n.$$

又

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})&=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+\mathrm{rank}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\\&\geqslant\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\\&=\mathrm{rank}\,\boldsymbol{E}=n,\end{aligned}$$

于是

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=n.$$

因为1和2的几何重数分别为$n-\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$和$n-\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$,并且由上式知

$$n-\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+n-\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=n,$$

所以$\boldsymbol{A}$可对角化.

34. 设n阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值全非负,证明:存在特征值均为非负实数的实对称矩阵$\boldsymbol{B}$,使$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

解 因为$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵,所以存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$,使得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为$\boldsymbol{A}$的特征值.令

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}},$$

则$\boldsymbol{B}$是实对称矩阵,其特征值为$\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n}$,且使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

35. 设三阶行列式$D=\begin{vmatrix}a&-5&8\\0&a+1&8\\0&3a+3&25\end{vmatrix}=0$,三阶矩阵$\boldsymbol{A}$的三个特征值$1,-1,0$对应的特征向量分别为$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\2a\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}a\\a+3\\a+2\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}a-2\\-1\\a+1\end{bmatrix}$,试确定参数$a$,并求$\boldsymbol{A}$.

解 由$D=0$即$a(a+1)=0$,解得$a=0$或$a=-1$.

记 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3]$，则由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值对应的特征向量，可知 $|\boldsymbol{P}|=-a-1\neq0$，因此得 $a=0$. 于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}-5&4&-6\\3&-3&3\\7&-6&8\end{bmatrix}.$$

36. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个相异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，令 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关；

(2) 若 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A\beta}$，求 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 及行列式 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|$.

解　(1) 因为三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个相异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，从而特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{A}$ 可对角化. 令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3]$，则 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，且

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\beta}\ \ \boldsymbol{A\beta}\ \ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}]&=[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3\ \ \ \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3\ \ \ \lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_3]\\&=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2\\1&\lambda_2&\lambda_2^2\\1&\lambda_3&\lambda_3^2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

由 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 相异知上式最后一个矩阵的行列式不为零，因此矩阵 $[\boldsymbol{\beta}\ \ \boldsymbol{A\beta}\ \ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}]$ 可逆，即 $\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

(2) 由条件 $\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{A\beta}$ 知

$$\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1^3\\\lambda_2^3\\\lambda_3^3\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{bmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的三个相异特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$. 从而各特征值的几何重数均为 1，即知 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$.

记 $\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}(0,1,-1)$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$，且 $|\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}|=6$，于是

$$|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{PBP}^{-1}+2\boldsymbol{PP}^{-1}|=|\boldsymbol{P}||\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}||\boldsymbol{P}^{-1}|=|\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}|=6.$$

37. 求下列矩阵的 Jordan 标准形及其相似变换矩阵：

(1) $\begin{bmatrix}8&-3&6\\3&-2&0\\-4&2&-2\end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix}3&1&-1\\-2&0&2\\-1&-1&3\end{bmatrix}$.

解　(1) 记题中矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$. 从而 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}2&&\\&1&\delta\\&&1\end{bmatrix},$$

其中 $\delta=0$ 或 1. 易知 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2$，从而 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{E})=2$，故 $\delta=1$，于是

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}2&&\\&1&1\\&&1\end{bmatrix}.$$

令相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{p}_1\quad \boldsymbol{p}_2\quad \boldsymbol{p}_3]$，则

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{p}_1\quad \boldsymbol{p}_2\quad \boldsymbol{p}_3]=[\boldsymbol{p}_1\quad \boldsymbol{p}_2\quad \boldsymbol{p}_3]\begin{bmatrix}2&&\\&1&1\\&&1\end{bmatrix},$$

即 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 线性无关，且满足

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=2\boldsymbol{p}_1,\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_2,\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3.\end{cases}$$

解齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(8,6,-5)^{\mathrm{T}}$，取 $\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{\xi}_1$.

解齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_2=(3,3,-2)^{\mathrm{T}}$，取 $\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{\xi}_2$.

解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}_2$，得 $\boldsymbol{\eta}=(3,2,-2)^{\mathrm{T}}$，取 $\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{\eta}$. 于是

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}8&3&3\\6&3&2\\-5&-2&-2\end{bmatrix}.$$

(2) 记题中矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)^3$，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$. 从而 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}2&\delta_1&\\&2&\delta_2\\&&2\end{bmatrix},$$

其中 $\delta_i=0$ 或 $1(i=1,2)$. 易知 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=1$，从而 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{J}-2\boldsymbol{E})=1$，所以 δ_1,δ_2 中有一个为 0，不妨设 $\delta_1=0$，所以

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}2&&\\&2&1\\&&2\end{bmatrix}.$$

令相似变换矩阵 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{p}_1\quad \boldsymbol{p}_2\quad \boldsymbol{p}_3]$，则

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{p}_1\quad \boldsymbol{p}_2\quad \boldsymbol{p}_3]=[\boldsymbol{p}_1\quad \boldsymbol{p}_2\quad \boldsymbol{p}_3]\begin{bmatrix}2&&\\&2&1\\&&2\end{bmatrix},$$

即 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 线性无关，且满足

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=2\boldsymbol{p}_1,\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=2\boldsymbol{p}_2,\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{p}_2+2\boldsymbol{p}_3.\end{cases}$$

解方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，可取 $\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{p}_2=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$，$k_1,k_2$ 是不全为零的数.

方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$ 有解，即

$$\begin{bmatrix}1&1&-1\\-2&-2&2\\-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_1+k_2\\k_1\\k_2\end{bmatrix}$$

有解,当且仅当 $k_1=2k_2$,此时解得 $\boldsymbol{\eta}=(0,0,k_2)^{\mathrm{T}}$,$k_2\neq 0$. 令 $k_2=1$,则 $\boldsymbol{p}_2=2\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$,且 $\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{\eta}$. 于是

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\1&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

38. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3&3&-2\\-7&6&-3\\1&-1&2\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^k$.

解 因 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$,故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=2$. 从而不难求得 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形及相似变换矩阵分别为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1&&\\&2&1\\&&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&2\\1&-1&0\end{bmatrix}.$$

于是

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&&\\&2&1\\&&2\end{bmatrix}^k\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&2\\1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&2^k&k2^{k-1}\\&&2^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&1\\2&-1&0\\-3&2&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2-(3k+2)2^{k-1}&-1+(k+1)\cdot 2^k&1-(k+2)\cdot 2^{k-1}\\4-3k\cdot 2^{k-1}&-2+(k+3)\cdot 2^k&2-(k+4)\cdot 2^{k-1}\\2+(3k-4)2^{k-1}&-1-(k-1)\cdot 2^k&1+k\cdot 2^{k-1}\end{bmatrix}.$$

39. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$.

(1) 证明 $\boldsymbol{A}^{k+2}=\boldsymbol{A}^k+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}(k\geqslant 1)$;

(2) 求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

解 (1) 因为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1$,所以由 Cayley-Hamilton 定理知

$$\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0},$$

上式两端同乘 $\boldsymbol{A}^{k-1}$后整理得

$$\boldsymbol{A}^{k+2}-\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}^{k+1}-\boldsymbol{A}^{k-1},$$

于是

$$\boldsymbol{A}^{k+2}-\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}^{k+1}-\boldsymbol{A}^{k-1}=\boldsymbol{A}^k-\boldsymbol{A}^{k-2}=\cdots=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E},\quad k\geqslant 1,$$

即

$$\boldsymbol{A}^{k+2}=\boldsymbol{A}^k+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E},\quad k\geqslant 1.$$

(2) 由(1)知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{100}&=\boldsymbol{A}^{98}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}\\&=(\boldsymbol{A}^{96}+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})+\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}\\&=\boldsymbol{A}^{96}+2(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^{94}+3(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})=\cdots\\&=\boldsymbol{A}^2+49(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})=50\boldsymbol{A}^2-49\boldsymbol{E},\end{aligned}$$

从而

$$A^{100}=50\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}-49\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\50&1&0\\50&0&1\end{bmatrix}.$$

40. 某实验员对 10000 株(其中 7000 株开红花,3000 株开白花)豌豆观察,知母本为开红花的豌豆,以概率 0.95 遗传给下一代仍开红花,以概率 0.05 变异为开白花;母本为开白花的豌豆,以概率 0.85 遗传,以概率 0.15 变异为开红花.

(1) 第十代开红花和白花的豌豆各为多少?

(2) 第 30、50 代的情形呢?试分析原因.

解 (1) 设第 n 代开红花和白花的豌豆分别为 x_n 株和 y_n 株,$x_0=7000$,$y_0=3000$,则有

$$\begin{cases}x_{n+1}=0.95x_n+0.15y_n,\\y_{n+1}=0.85y_n+0.05x_n,\end{cases}$$

可以写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.95&0.15\\0.05&0.85\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix},$$

记为

$$\begin{bmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix},$$

从而

$$\begin{bmatrix}x_{10}\\y_{10}\end{bmatrix}=A^{10}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.95&0.15\\0.05&0.85\end{bmatrix}^{10}\begin{bmatrix}7000\\3000\end{bmatrix}.$$

不难求出矩阵 A 的两个特征值 $\lambda_1=1$,$\lambda_2=0.8$,以及它们对应的两个线性无关的特征向量 $p_1=(3,1)^T$ 和 $p_2=(-1,1)^T$,记矩阵 $P=[p_1\quad p_2]$,则

$$A^{10}=P\begin{bmatrix}\lambda_1&\\&\lambda_2\end{bmatrix}^{10}P^{-1}=P\begin{bmatrix}\lambda_1^{10}&\\&\lambda_2^{10}\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}3&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\\&0.8^{10}\end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1\\-1&3\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3+0.8^{10}&3-3\times0.8^{10}\\1-0.8^{10}&1+3\times0.8^{10}\end{bmatrix},$$

因此

$$\begin{bmatrix}x_{10}\\y_{10}\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}30000-2000\times0.8^{10}\\10000+2000\times0.8^{10}\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}7446\\2554\end{bmatrix},$$

所以第十代开红花和白花的豌豆各约为 7446 株和 2554 株.

(2) 按照公式

$$A^n=P\begin{bmatrix}\lambda_1^n&\\&\lambda_2^n\end{bmatrix}P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\\&0.8^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&3\end{bmatrix},$$

不难求出,第 30 代开红花和白花的豌豆各约为 7499 株和 2501 株,第 50 代开红花和白花的豌豆各约为 7500 株和 2500 株.

注 (1) 当 $n\to\infty$ 时,有

$$\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^n\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}30000-2000\times0.8^n\\10000+2000\times0.8^n\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}7500\\2500\end{bmatrix}.$$

(2) 特征向量 $\boldsymbol{p}_1=(3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}_2=(-1,1)^{\mathrm{T}}$ 构成 $\mathbb{R}^2$ 的一个基,因此有

$$\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=k_1\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{p}_2,$$

故

$$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=k_1\lambda_1\boldsymbol{p}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{p}_2,$$

进而有

$$\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^n\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=k_1\lambda_1^n\boldsymbol{p}_1+k_2\lambda_2^n\boldsymbol{p}_2.$$

所以当 $n\to\infty$ 时,有 $\lambda_2^n\to0$,从而当 n 充分大时,$\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}\approx k_1\boldsymbol{p}_1$,这就是说开红花与开白花的豌豆数量之比近似于 $\boldsymbol{p}_1$ 中分量之比 3∶1.

41. 某公司对所生产的产品通过市场营销调查得到的统计资料表示,已经使用本公司产品的客户中有 60%表示仍会继续购买该公司产品,在尚未使用该产品的客户中,有 25%的客户将购买该产品,目前该产品的市场占有率为 60%,能否预测 n 年后该产品的市场占有率?

解 设第 n 年该产品市场占有率为 x_n,则

$$\begin{cases}x_n=0.6x_{n-1}+0.25(1-x_{n-1}),\\1-x_n=0.4x_{n-1}+0.75(1-x_{n-1}),\end{cases}$$

写成矩阵形式得递推式

$$\begin{bmatrix}x_n\\1-x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6&0.25\\0.4&0.75\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{n-1}\\1-x_{n-1}\end{bmatrix}=\cdots=\begin{bmatrix}0.6&0.25\\0.4&0.75\end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix}x_1\\1-x_1\end{bmatrix}.$$

令

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.6&0.25\\0.4&0.75\end{bmatrix},$$

不难求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=0.35$,以及它们对应的两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_1=(5,8)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{p}_2=(1,-1)^{\mathrm{T}}$,记矩阵 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{p}_1\quad\boldsymbol{p}_2]$,则由 $x_1=0.6$ 有

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}x_n\\1-x_n\end{bmatrix}&=\boldsymbol{A}^{n-1}\begin{bmatrix}0.6\\0.4\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&0\\0&0.35^{n-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}0.6\\0.4\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}5&1\\8&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0.35^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1\\8&-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0.6\\0.4\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{65}\begin{bmatrix}25+14\times0.35^{n-1}\\40-14\times0.35^{n-1}\end{bmatrix},\end{aligned}$$

因此 n 年后该产品的市场占有率为 $\frac{5}{13}+\frac{14}{65}\times0.35^{n-1}$.

42. 生物外部的某种特征由其内部的显性基因 A 与隐性基因 a 组成的基因对 AA,Aa,aa 所确定.例如,某种花的三种颜色被三种基因对确定.常染色体的遗传规律是亲本双方各自的两个基因等可能地遗传给后代一个,因此亲本(双方)基因型和后代基因型的关系如表 5.1 所示.

表 5.1 亲本(双方)基因型和后代基因型的关系

后代基因型	亲本(双方)基因型					
	$AA-AA$	$AA-Aa$	$AA-aa$	$Aa-Aa$	$Aa-aa$	$aa-aa$
AA	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
Aa	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
aa	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

设某种植物有三种基因型 AA,Aa,aa,它们各占总数的百分数为 a_0,b_0,c_0($a_0+b_0+c_0=1$).如果它们只与 Aa 型结合而进行繁殖,问繁殖到第 n 代时,三种基因型植物占总数的百分数 a_n,b_n,c_n 各为多少?并求其极限值.

解 根据题意,有

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{4}b_{n-1}, \\ b_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} + \frac{1}{2}c_{n-1}, \\ c_n = \qquad\quad + \frac{1}{4}b_{n-1} + \frac{1}{2}c_{n-1}, \end{cases}$$

写成矩阵形式得递推式

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix},$$

令

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

不难求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $\lambda_1=0$,$\lambda_2=\frac{1}{2}$,$\lambda_3=1$,以及它们对应的三个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_1=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{p}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{p}_3=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$,记矩阵$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2 \quad \boldsymbol{p}_3]$,则

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{4}\right)a_0 + \frac{1}{4}b_0 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)c_0 \\ \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}b_0 + \frac{1}{2}c_0 \\ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)a_0 + \frac{1}{4}b_0 + \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{4}\right)c_0 \end{bmatrix},$$

当 $n \to \infty$ 时,有

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{4}b_0 + \frac{1}{4}c_0 \\ \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}b_0 + \frac{1}{2}c_0 \\ \frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{4}b_0 + \frac{1}{4}c_0 \end{bmatrix}.$$

第 6 章

二 次 型

基本要求

1. 理解二次型及其矩阵表示,了解二次型秩的概念,理解合同矩阵的概念.

2. 理解二次型的标准形,掌握化实二次型为标准形的正交变换法,熟悉配方法,会用合同初等变换法.

3. 理解实二次型的规范形,了解惯性定理以及实二次型的正惯性指数、负惯性指数.

4. 了解正定二次型和正定矩阵的概念及性质,会判别二次型和矩阵的正定性.

5. 知道半正定、负定、半负定、不定二次型以及半正定、负定、半负定、不定矩阵.

内容综述

一、二次型及其矩阵表示

1. n 元二次型是指 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

其中 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$,$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$.

二次型 f 与对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一一对应,rank $\boldsymbol{A}$ 称为二次型 f 的秩.

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,如果有 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$,则称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是合同的,记作 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$. 当 $\boldsymbol{C}$ 为实矩阵时,则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是实合同的.

注 合同是方阵之间的一种等价关系;与对称矩阵合同的矩阵必定是对称矩阵.

3. 设有线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$,其中 $\boldsymbol{C}\in\mathbb{F}^{n\times n}$,$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{F}^{n}$. 若 $\boldsymbol{C}$ 是实矩阵,则称为实线性变换. 若 $\boldsymbol{C}$ 为可逆矩阵,则称为可逆的(或满秩的、非退化的)线性变换. 若 $\boldsymbol{C}$ 为正交矩阵,则称为正交变换.

4. 正交变换保持向量的内积不变、向量的长度不变、向量的夹角不变.

二、二次型的标准形和规范形

1. 只含平方项的二次型称为二次型的标准形.

2. 任意一个二次型都可以经过可逆线性变换化为标准形;任何一个实二次型总可以

经过正交变换化为标准形.

3. 化实二次型为标准形有三种方法：正交变换法、配方法、合同初等变换法。

注　二次型的标准形不唯一.

4. $z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$ 称为实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范形.

5. 惯性定理：任何一个实二次型可经过可逆实线性变换化为规范形，且规范形是唯一的.

6. 在实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范形中，正平方项的个数 p 称为 f 的正惯性指数；负平方项的个数 $r-p$ 称为 f 的负惯性指数.

注　实二次型的规范形由它的秩和正惯性指数唯一确定.

7. 任意实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都实合同于形如

$$\mathrm{diag}(\boldsymbol{E}_p,\ -\boldsymbol{E}_q,\boldsymbol{0})$$

的对角矩阵，其中 $p+q$ 等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩，数 p 由 $\boldsymbol{A}$ 唯一确定，称为 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数.

三、正定二次型

1. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是实二次型，如果对于任何不全为零的实数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)>0$，则称实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是正定的. 对应的矩阵称为正定矩阵.

2. 对于实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，则下列条件等价：

(1) f 是正定的；

(2) f 的正惯性指数等于 n；

(3) $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值全为正数；

(4) 存在可逆实矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$；

(5) 存在可逆实矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$；

(6) $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式全大于 0.

3. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是实二次型，对于任意不全为零的实数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，若都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\geqslant 0$，则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是半正定的；若都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)<0$，则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是负定的；若都有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\leqslant 0$，则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是半负定的. 若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 既不是半正定的也不是半负定的，则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是不定的.

若实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是半正定的(或负定的、或半负定的、或不定的)，则称 $\boldsymbol{A}$ 是半正定的(或负定的、或半负定的、或不定的).

疑难辨析

问题 1　二次型的化简为何要采用可逆线性变换？

答　这是因为，只有线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 才能将旧二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为新二次型 $f=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$；只有线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 可逆，才能使新、旧二次型具有相同的秩，才能从新二次型的性质推出旧二次型的性质.

问题 2　为何将可逆线性变换称为非退化的线性变换？

答　非退化的意思是“没有变坏”. 可逆线性变换可以保留原有的好的性质，例如，可逆线性变换能够保持二次型的秩不变，可逆实线性变换能够保持实二次型的正惯性指数和负

惯性指数不变,这些都是二次型的重要指标.因此称可逆线性变换为非退化的线性变换.

问题 3 为什么要规定二次型的矩阵为对称矩阵?

答 研究二次型的目的是为了将一般的二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经过可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 化为只含平方项的标准形 $f=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$,这里 $\boldsymbol{B}$ 为对角矩阵,于是

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y},$$

即有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$. 由于 $\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵,$\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵,因此 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}$是对称矩阵. 所以,规定二次型的矩阵为对称矩阵,是将二次型化为标准形的必然选择.

问题 4 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,试问二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的矩阵是否为 $\boldsymbol{A}$?

答 当 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵时,二次型 $f(\boldsymbol{x})$的矩阵就是 $\boldsymbol{A}$.

当 $\boldsymbol{A}$ 不是对称矩阵时,二次型 $f(\boldsymbol{x})$的矩阵不是 $\boldsymbol{A}$. 注意到

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},$$

从而

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}\boldsymbol{x},$$

且容易看出$\dfrac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}$是对称矩阵,因此它是二次型 $f(\boldsymbol{x})$的矩阵.

注 *上述解答给出了求此类二次型的矩阵的一般方法.*

问题 5 矩阵的“等价”“相似”“合同”有什么区别与联系?

答 由定义知,相似的矩阵一定是等价的,合同的矩阵也一定是等价的.

第 5 章疑难辨析中问题 1 已经指出,相似的矩阵必等价,等价的矩阵不一定相似. 下列例子说明:等价的矩阵不一定是合同的,“合同”与“相似”之间不存在蕴涵关系.

(1) $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$ 不蕴涵 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$. 例如,对于矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix},$$

显然 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵,而 $\boldsymbol{B}$ 不是对称矩阵,所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不合同.

(2) $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$ 不蕴涵 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$. 例如,对于矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&4\end{bmatrix},$$

只要取 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$,就有 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$,即 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$. 因为与数量矩阵相似的矩阵只能是它自己,所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似.

(3) $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 不蕴涵 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$. 例如,对于矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&-3\\2&-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix},$$

取 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}3&1\\2&1\end{bmatrix}$,则得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$,即 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 不是对称矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵,因此 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不合同.

问题 6 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩与 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值个数有什么关系?

答 (1) 当 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵时，$\boldsymbol{A}$ 的秩等于 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值个数.

(2) 当方阵 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵但不是对称矩阵时，$\boldsymbol{A}$ 的秩不一定等于 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值个数.

例如，方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{bmatrix}$的特征值为 0,0，即非零特征值个数为零，但rank $\boldsymbol{A}=1$.

(3) 当方阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵但不是实矩阵时，$\boldsymbol{A}$ 的秩不一定等于 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值个数.

例如，方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & \mathrm{i}\\\mathrm{i} & -1\end{bmatrix}$的特征值为 0,0，即非零特征值个数为零，但rank $\boldsymbol{A}=1$.

问题 7 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实对称矩阵，那么 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$ 有什么联系？

答 (1) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$.

事实上，因 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是实对称矩阵，故 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可正交相似对角化；又由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值，从而 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 正交相似于同一个对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$，即存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2$，使得

$$\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2,$$

于是有

$$(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{B},$$

即 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$.

(2) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$，则不一定有 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

反例见本章疑难辨析问题 5 的解答中(2).

问题 8 正定二次型、负定二次型、半正定二次型、半负定二次型之间有什么联系和区别？

答 根据定义，可以知道：

实二次型 $f(\boldsymbol{x})$是负定的当且仅当$-f(\boldsymbol{x})$是正定的；

实二次型 $f(\boldsymbol{x})$是半负定的当且仅当$-f(\boldsymbol{x})$是半正定的；

正定二次型是半正定二次型，反之不真；

负定二次型是半负定二次型，反之不真.

注 对于正定矩阵、负定矩阵、半正定矩阵、半负定矩阵也有类似结论.

问题 9 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 分别是 n 阶实对称矩阵、可逆矩阵和正交矩阵，下面矩阵

(1) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAQ}$；(2) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$；(3) $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$；(4) $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$

哪些与 $\boldsymbol{A}$ 有相同的行列式、秩、特征值、正惯性指数？

答 (1) $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$，此时 rank $\boldsymbol{A}$=rank $\boldsymbol{B}$；

(2) $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$，此时$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{C}|$，rank $\boldsymbol{A}$=rank $\boldsymbol{C}$，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 有相同的特征值；

(3) $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{G}$，此时 rank $\boldsymbol{A}$=rank $\boldsymbol{G}$，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{G}$ 有相同的正惯性指数；

(4) $\boldsymbol{A}$ 正交相似于 $\boldsymbol{H}$，从而 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{H}$ 且 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{H}$，此时$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{H}|$，rank $\boldsymbol{A}$=rank $\boldsymbol{H}$，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 有相同的特征值和相同的正惯性指数.

问题 10 实二次型有规范形，那么复二次型是否也有规范形？

答 任何一个复二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$都能经可逆线性变换化为标准形，只需适当改变变量的顺序(这也是一个可逆线性变换)，就可得到

$$f=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2,\quad d_i\neq 0, i=1,2,\cdots,r,$$

其中 r 是 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的秩. 然后做可逆线性变换(不一定是实线性变换)

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{d_1}} z_1, \\ \quad\vdots \\ y_r = \dfrac{1}{\sqrt{d_r}} z_r, \\ y_{r+1} = z_{r+1}, \\ \quad\vdots \\ y_n = z_n, \end{cases}$$

将其化为如下形式的标准形：

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2,$$

这就是复二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的规范形.

注 (1) 复二次型的规范形也是唯一的，它由其秩所确定；

(2) 化复二次型为规范形所使用的线性变换不能要求是实线性变换.

范例精讲

题型 1 二次型的概念和性质

例 1 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2bx_2x_3$ 的秩为 2，则 a, b 应满足的条件为 【 】

(A) $a \neq b$； (B) $a = b = 1$； (C) $a = b, a \neq \pm 1$； (D) $a = b = -1$.

解 二次型 f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix},$$

由 f 的秩为 2，知 $|\boldsymbol{A}| = -(a-b)^2 = 0$，可得 $a = b$. 又

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以当 $a \neq \pm 1$ 时，$\text{rank}\,\boldsymbol{A} = 2$，故选(C).

注 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 只能说明 $\text{rank}\,\boldsymbol{A} < 3$，而不能确定 $\text{rank}\,\boldsymbol{A} = 2$.

例 2 证明

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -x_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -x_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个二次型，并求其矩阵.

证 记矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$，$A_{ij}$ 为 $|\boldsymbol{A}|$ 中元 $a_{ij}\,(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 的代数余子式，则

$$f=-x_1\begin{vmatrix}-x_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ -x_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+x_2\begin{vmatrix}-x_1 & a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ -x_2 & a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ -x_n & a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\cdots+$$

$$(-1)^{n+2}x_n\begin{vmatrix}-x_1 & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1}\\ -x_2 & a_{21} & \cdots & a_{2,n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -x_n & a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1}\end{vmatrix}$$

$$=x_1(A_{11}x_1+A_{21}x_2+\cdots+A_{n1}x_n)+x_2(A_{12}x_1+A_{22}x_2+\cdots+A_{n2}x_n)+\cdots+$$

$$x_n(A_{1n}x_1+A_{2n}x_2+\cdots+A_{nn}x_n)$$

$$=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}.$$

令 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{n\times n}$ 为 f 的矩阵，则 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$，且 $\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵，于是

$$b_{ij}=\frac{1}{2}(A_{ij}+A_{ji}),\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

注 本题使用的是本章疑难辨析中问题4的方法.

例3 设 $d_1\neq0$，试证：无论 n 为何值，二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2+[ax_1+(a+d_1)x_2+(a+2d_1)x_3]^2+\sum_{i=2}^{n}[(a+d_i)x_1+(a+2d_i)x_2+(a+3d_i)x_3]^2$$

的秩均为2.

证 做线性映射

$$y_0=x_1+x_2+x_3,$$
$$y_1=ax_1+(a+d_1)x_2+(a+2d_1)x_3,$$
$$y_i=(a+d_i)x_1+(a+2d_i)x_2+(a+3d_i)x_3,\quad i=2,3,\cdots,n,$$

则

$$\begin{bmatrix}y_0\\ y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ a & a+d_1 & a+2d_1\\ a+d_2 & a+2d_2 & a+3d_2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a+d_n & a+2d_n & a+3d_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}.$$

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ a & a+d_1 & a+2d_1\\ a+d_2 & a+2d_2 & a+3d_2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a+d_n & a+2d_n & a+3d_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}y_0\\ y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix},$$

从而

$$f=y_0^2+y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}.$$

对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 做行初等变换，得

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & d_1 & 2d_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以当 $d_1 \neq 0$ 时，$\operatorname{rank} \boldsymbol{A}=2$，这与 n 的取值无关. 而 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=\operatorname{rank} \boldsymbol{A}$，故二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的秩为 2.

题型 2　矩阵合同的判定与证明

例 4　设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$　【　】

(A) 合同且相似；　(B) 合同但不相似；

(C) 不合同但相似；　(D) 不合同也不相似.

解　由于 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，因此存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵，且 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的主对角元为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 由 $\operatorname{rank} \boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{rank} \boldsymbol{A}=1$ 知 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的主对角元应有三个 0；又 $\operatorname{tr} \boldsymbol{\Lambda}=\operatorname{tr} \boldsymbol{A}=4$，故 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的另一个主对角元为 4，所以 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，且 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$. 故应选(A).

注　(1) 两个实对称矩阵相似当且仅当它们有相同的特征值.

(2) 两个实对称矩阵合同当且仅当它们有相同的秩和相同的正惯性指数.

例 5　已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是否合同，是否相似？

解　因为 $|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-3)^2$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,3,3. 但 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 0,1,2，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似.

由于 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是实对称矩阵，且秩都是 2、正惯性指数都是 2，因此 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$.

例 6　设矩阵 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{B}_1$ 合同，$\boldsymbol{A}_2$ 与 $\boldsymbol{B}_2$ 合同，证明 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \\ & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \\ & \boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix}$ 合同.

证　因为 $\boldsymbol{A}_1 \simeq \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{A}_2 \simeq \boldsymbol{B}_2$，所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2$，使得

$$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{C}_1, \quad \boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{C}_2.$$

令 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \\ & \boldsymbol{C}_2 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{C}$ 可逆. 于是

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \\ & \boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \\ & \boldsymbol{C}_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \\ & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \\ & \boldsymbol{C}_2 \end{bmatrix}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \\ & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{C},$$

即

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \\ & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \\ & \boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix}.$$

题型 3 二次型的标准形和规范形

例 7 设 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3]$，$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ -\boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_2]$，若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 【 】

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$； (B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$；

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$； (D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

解 由二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}.$$

又

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ -\boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\alpha}_2]=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}\xlongequal{\text{def}}\boldsymbol{PC},$$

故

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP})\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

从而二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$. 所以选(A).

例 8 已知实二次型 $f=x_1^2+4x_2^2+tx_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-6x_2x_3$ 的正惯性指数为 2，负惯性指数为 1，则 t 的取值范围是________.

解 利用配方法化二次型为标准形，得

$$f=(x_1-x_2+2x_3)^2+3\left(x_2-\frac{1}{3}x_3\right)^2+\left(t-\frac{13}{3}\right)x_3^2,$$

只有 $\left(t-\dfrac{13}{3}\right)x_3^2$ 才可能是负平方项，故由题设知 $t<\dfrac{13}{3}$.

例 9 用配方法、合同初等变换法将二次型

$$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_3x_4$$

化为标准形和规范形.

解 (1) 配方法. 先将 f 配方成

$$f=(x_1+x_2-x_4)^2+(x_3-x_2+x_4)^2-(x_2-2x_4)^2+3x_4^2,$$

然后令

$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2-x_4,\\y_2=x_2-2x_4,\\y_3=-x_2+x_3+x_4,\\y_4=x_4,\end{cases}\quad \text{即}\begin{cases}x_1=y_1-y_2-y_4,\\x_2=y_2+2y_4,\\x_3=y_2+y_3+y_4,\\x_4=y_4,\end{cases}$$

记

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&-1&0&-1\\0&1&0&2\\0&1&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

则二次型 f 经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 化成标准形 $f=y_1^2-y_2^2+y_3^2+3y_4^2$.

再令

$$\begin{cases} z_1=y_1, \\ z_2=y_2, \\ z_3=y_3, \\ z_4=\sqrt{3}y_4, \end{cases} \quad 即 \begin{cases} y_1=z_1, \\ y_2=z_2, \\ y_3=z_3, \\ y_4=\dfrac{\sqrt{3}}{3}z_4, \end{cases}$$

记 $\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}\left(1,1,1,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，则二次型 f 经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{PQz}$ 化成规范形 $f=z_1^2-z_2^2+z_3^2+z_4^2$.

(2) 合同初等变换法. 记二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，则

$$[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{E}_4]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} & 1 & -\dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{2\sqrt{3}}{3} & -\dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \sqrt{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

令

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -\dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3} & -\dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

则原二次型 f 经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{y}$ 化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+3y_3^2-\dfrac{1}{2}y_4^2$；二次型 f 经

可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{z}$ 化成规范形 $f=z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_4^2$.

注　(1) 配方法化二次型为标准形的步骤如下：

如果二次型不含平方项，则先做可逆线性变换使之出现平方项. 如果二次型含平方项，则将含某个平方项中变量的那些项归并后再配方；然后对剩余部分继续归并、配方，直至将二次型化成只含平方项.

(2) 合同初等变换法化二次型为标准形的两种途径：

一种是主教材中介绍的，对矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{E}\end{bmatrix}$ 做合同初等变换(先做初等列变换再做相应的初等行变换)，将 $\boldsymbol{A}$ 化为对角矩阵的同时 $\boldsymbol{E}$ 就化为要找的矩阵 $\boldsymbol{C}$.

另一种是对矩阵 $[\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{E}]$ 做合同初等变换(先做初等行变换再做相应的初等列变换)，将 $\boldsymbol{A}$ 化为对角矩阵的同时 E 就化为矩阵 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$，而 $\boldsymbol{C}$ 就是要找的矩阵.

例 10　已知 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2. 求：

(1) a 的值；

(2) 正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；

(3) 方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

解　(1) 二次型 f 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},$$

由 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2$，$|\boldsymbol{A}|=-8a$，得到 $a=0$.

(2) 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-2)^2=0$ 解得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=2$.

对于 $\lambda_1=0$，解方程组 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得对应的一个特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$，单位化得 $\boldsymbol{q}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$.

对于 $\lambda_2=\lambda_3=2$，解方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{p}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{p}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，单位化得 $\boldsymbol{q}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{q}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$. 所求正交矩阵为

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{q}_1\quad \boldsymbol{q}_2\quad \boldsymbol{q}_3]=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

则由正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，可将二次型化为标准形 $f=2y_2^2+2y_3^2$.

(3) 方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的矩阵形式为 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$，在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下，

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=2y_2^2+2y_3^2=0,$$

解得 $y_2=y_3=0$，$y_1=c_1$ 为任意实数，从而

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix}.$$

记 $c=\frac{1}{\sqrt{2}}c_1$，则方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的全部解为 $x_1=-c,x_2=c,x_3=0$，c 为任意实数.

注 正交变换法化实二次型为标准形的步骤：

(1) 求二次型的矩阵；

(2) 求矩阵的特征值及每个特征值对应的特征向量；

(3) 对一个特征值对应的线性无关的特征向量正交标准化；

(4) 构造正交矩阵，将矩阵对角化；

(5) 将二次型经正交变换化为标准形.

例 11 设 a 为参数，实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2.$$

(1) 求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解；

(2) 求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

解 (1) 由 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 得齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ x_2+x_3=0, \\ x_1+ax_3=0, \end{cases}$$

对其系数矩阵做初等行变换，得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix}.$$

当 $a\neq 2$ 时，齐次线性方程组只有零解.

当 $a=2$ 时，齐次方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=k\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad k \text{ 为任意数.}$$

(2) 由(1)知，当 $a\neq 2$ 时，$\boldsymbol{A}$ 可逆，令

$$\begin{cases} z_1=x_1-x_2+x_3, \\ z_2=x_2+x_3, \\ z_3=x_1+ax_3, \end{cases}$$

则可逆线性变换 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，将二次型化为规范形 $f=z_1^2+z_2^2+z_3^2$.

当 $a=2$ 时，因

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= (x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+2x_3)^2 \\ &= 2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3, \end{aligned}$$

故二次型的矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$. 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\lambda(\lambda^2-10\lambda+18)=0,$$

得矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值 $\lambda_1=5+\sqrt{7},\lambda_2=5-\sqrt{7},\lambda_3=0$，从而二次型的规范形为 $f=z_1^2+z_2^2$.

注 当 $a=2$ 时,也可以用配方法求二次型的规范形.

例 12 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(1) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(2) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$,求 a 的值.

解 (1) 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{bmatrix}$,从而

$$|\lambda E-\boldsymbol{A}|=(\lambda-a)(\lambda-a-1)(\lambda-a+2),$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=a,\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-2$.

(2) 因为 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$,所以 $\boldsymbol{A}$ 有两个特征值为正,一个特征值为 0.

若 $\lambda_1=a=0$,则 $\lambda_2=1>0,\lambda_3=-2<0$,不符合题意;

若 $\lambda_2=a+1=0$,则 $\lambda_1=-1<0,\lambda_3=-3<0$,不符合题意;

若 $\lambda_3=a-2=0$,则 $\lambda_1=2>0,\lambda_2=3>0$,符合题意,故 $a=2$.

例 13 设 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r,且满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,求:

(1) 二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的标准形;

(2) 行列式 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^n|$ 的值.

解 (1) 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值,由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 知,特征值 λ 必满足方程 $\lambda^2-\lambda=0$,从而 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$,即 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只取 0 或 1.

因为 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,且 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=r$,所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值中有 r 个 1,$n-r$ 个 0,故二次型的一个标准形为 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2$.

(2) 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 得 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}(k\geqslant 2)$,故

$$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^n|=|\boldsymbol{E}+n\boldsymbol{A}|.$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值中有 r 个 1,$n-r$ 个 0,因此 $\boldsymbol{E}+n\boldsymbol{A}$ 的特征值中有 r 个 $1+n$,$n-r$ 个 1,从而

$$|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^n|=|\boldsymbol{E}+n\boldsymbol{A}|=(1+n)^r.$$

例 14 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+2ax_2x_3$ 通过正交变换化为标准形 $f=2y_1^2+2y_2^2+by_3^2$. 求:

(1) a,b 及所用正交变换矩阵 $\boldsymbol{Q}$;

(2) f 在条件 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=3$ 下的最大值.

解 (1) 二次型及其对应的标准形的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & a \\ -1 & a & 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & b \end{bmatrix},$$

因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,2,b$,从而由

$$|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=-a^2-2a-1=0$$

知 $a=-1$. 又 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}$,则 $b=-1$. 于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,2,-1$.

对于 $\lambda=2$,解方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=\boldsymbol{0}$,可得对应的线性无关特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{p}_2=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$,单位化得 $\boldsymbol{q}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{q}_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$.

对于 $\lambda=-1$,解方程组 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,可得对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,单位化得 $\boldsymbol{q}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}}$. 所求正交矩阵为

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{q}_1 \quad \boldsymbol{q}_2 \quad \boldsymbol{q}_3]=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & -2 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

(2) 因为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,所以 $3=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$,于是

$$f=2y_1^2+2y_2^2-y_3^2\leqslant 2y_1^2+2y_2^2+2y_3^2=6,$$

取 $\boldsymbol{y}=\frac{1}{2}(\sqrt{6},\sqrt{6},0)^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=3$,且使得 $f=6$,即在条件 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=3$ 下,f 的最大值为 6.

例 15 设 n 元实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,证明 f 在条件 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 下的最大值为实二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值,最大特征值对应的单位特征向量为最大值点.

解 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 f 的特征值,则存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,使

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

设 $\lambda_k=\max\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$,由于 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 为正交变换,因此保持长度不变,即

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1,$$

因此

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\leqslant\lambda_k(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)\leqslant\lambda_k,$$

这说明在 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 的条件下 f 的最大值不超过 λ_k.

取 $\boldsymbol{y}_0$ 为 n 维基本向量 $\boldsymbol{e}_k$,则 $\boldsymbol{y}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_0=1$,且

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ky_k^2+\cdots+\lambda_ny_n^2=\lambda_k.$$

将 $\boldsymbol{Q}$ 按列分块为 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{q}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{q}_k \quad \cdots \quad \boldsymbol{q}_n]$,则 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{q}_k$,且 $\boldsymbol{q}_k$ 是特征值 λ_k 对应的单位特征向量,从而 $\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{y}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_0=1$,且

$$f(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{y}_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}_0=\lambda_k,$$

这说明 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处取到 λ_k,因此 f 在 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 条件下的最大值为 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值,最大特征值对应的单位特征向量是最大值点.

注 同理可证:n 元实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在条件 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 下的最小值为实二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小特征值,最小特征值对应的单位特征向量为最小值点.

题型 4　由正交变换下二次型的标准形反求二次型

例 16 设三元实二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经正交变换化为 $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足矩阵方程

$$\left[\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^*\right]^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+4\boldsymbol{E},$$

且 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$,求二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 的表达式.

解 根据题设,$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-1,-1$,故 $|\boldsymbol{A}|=2$. 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$,知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}$.

因为

$$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^*=\left(\frac{1}{2}\right)^2|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1},$$

所以

$$2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}+4\boldsymbol{E}.$$

解得 $\boldsymbol{B}=2(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$，故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $-2,1,1$，且 $\boldsymbol{B\alpha}=-2\boldsymbol{\alpha}$.

设 $\boldsymbol{B}$ 的属于特征值 1 的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵知 $\boldsymbol{B}=2(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 也是实对称矩阵，因此 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，即 $x_1+x_2-x_3=0$，解得

$$\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\beta}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}\ \ \boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2]$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\mathrm{diag}(-2,1,1)$，从而

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix},$$

故

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}=-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3.$$

例 17 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，且 $\boldsymbol{Q}$ 的第三列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵.

解 (1) 由于二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=0$. 又因 $\boldsymbol{Q}$ 的第三列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_3=0$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$. 设 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵知 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0$，即

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_3=0,$$

取 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交. 故令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3]$，可得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(1,1,0)\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

(2) 因 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,1,0$，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $2,2,1$，即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的所有特征值为正，所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵.

题型 5 正定二次型的判定与应用

例 18 判定下列二次型的正定性.

(1) $f_1(x_1,x_2,x_3)=6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$；

(2) $f_2(x_1,x_2,x_3)=-5x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3$；

(3) $f_3(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+14x_3^2+7x_4^2+6x_1x_3+8x_1x_4-4x_2x_3+2x_2x_4+4x_3x_4$.

解 (1) 由于二次型 f_1 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}6&-2&2\\-2&5&0\\2&0&7\end{bmatrix},$$

且顺序主子式依次为

$$6>0,\quad \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=26>0,\begin{vmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}=162>0,$$

因此二次型 f_1 是正定二次型.

(2) 由于二次型 f_2 的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

且顺序主子式依次为

$$-5<0,\quad \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}=26>0,\quad \begin{vmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix}=-80<0,$$

因此二次型 f_2 是负定二次型.

(3) 对二次型 f_3 的矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 14 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

做倍加行变换将其化为上三角矩阵：

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 14 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -104 \end{bmatrix},$$

从而 f_3 的正惯性指数为 3,负惯性指数为 1,因此 f_3 是不定二次型.

例 19 求椭圆 $x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2=1$ 的面积.

解 令 $f(x_1,x_2)=x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2$,则二次型 $f(x_1,x_2)$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ_1,λ_2,则 $\lambda_1\lambda_2=|\boldsymbol{A}|=1$；而 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵,故 $\lambda_1>0,\lambda_2>0$,且存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$.

做正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,使二次型化为标准形 $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$. 由于正交变换不改变几何图形,因此不改变椭圆的面积,于是原椭圆经过正交变换(即旋转变换)化为

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2=1\quad 或\quad \frac{y_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2}+\frac{y_2^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2}=1,$$

则椭圆的面积为

$$S=\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}=\pi.$$

注 也可由特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^2-6\lambda+1=0$ 求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=3+\sqrt{8},\lambda_2=$

$3-\sqrt{8}$,再代入求出椭圆面积.

例 20 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2bx_1x_3$ 正定,求参数 a,b 的取值范围.

解 因为二次型 f 正定,所以 f 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&b\\1&a&0\\b&0&1\end{bmatrix}$$

的各阶顺序主子式全大于零,从而

$$\begin{vmatrix}2&1\\1&a\end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix}2&1&b\\1&a&0\\b&0&1\end{vmatrix}>0,$$

即

$$2a-1>0,\quad -ab^2+(2a-1)>0,$$

因此 a,b 的取值范围为

$$a>\frac{1}{2},\quad -\sqrt{2-\frac{1}{a}}<b<\sqrt{2-\frac{1}{a}}.$$

例 21 将实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+bx_2^2+ax_3^2+2cx_1x_3$$

化为标准形,写出可逆变换矩阵,并指出参数 a,b,c 满足什么条件时,f 为正定二次型.

解 令

$$\begin{cases}x_1=y_1\quad +y_3,\\x_2=\quad y_2,\\x_3=y_1\quad -y_3,\end{cases}$$

即

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix},$$

这是一个可逆线性变换,此时 f 化为标准形

$$f=(2a+2c)y_1^2+by_2^2+(2a-2c)y_3^2,$$

于是,当 $2a+2c>0,b>0,2a-2c>0$,即 $a>|c|,b>0$ 时,f 为正定二次型.

例 22 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵,令二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+x_n^2$$

的矩阵为 $\boldsymbol{B}$,证明:$\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵,且 $|\boldsymbol{B}|>|\boldsymbol{A}|$.

证 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$,则 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,且

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,n-1}&a_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n-1,1}&\cdots&a_{n-1,n-1}&a_{n-1,n}\\a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}&a_{nn}+1\end{bmatrix}.$$

显然 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的 k 阶顺序主子式 $|\boldsymbol{A}_k|>0(k=1,2,\cdots,n-1)$，因此 $\boldsymbol{B}$ 的前 $n-1$ 阶顺序主子式也全大于零. 现在考虑 $\boldsymbol{B}$ 的 n 阶顺序主子式 $|\boldsymbol{B}|$，得

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix}$$
$$=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{A}_{n-1}|>0,$$

可见 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵.

因为 $|\boldsymbol{A}_{n-1}|>0$，所以由上式可知 $|\boldsymbol{B}|>|\boldsymbol{A}|$.

同步练习

1. 填空题

(1) 二次型 $f(x_1,x_2)=2x_1^2+2x_2^2+3x_1x_2$ 在条件 $x_1^2+x_2^2=1$ 下的最大值为________.

(2) 若实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2tx_1x_2+2x_2x_3$ 正定，则 t 满足条件________.

(3) 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3-2ax_1x_3$ 的正负惯性指数均为 1，则 $a=$________.

(4) 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2，则 $c=$________.

(5) 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+ax_1x_2+ax_1x_3+ax_2x_3$，当 a 的取值范围为________时，f 是正定二次型.

(6) 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 可化为标准形 $f=6y_1^2$，则 $a=$________.

(7) 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3+7\boldsymbol{A}^2+16\boldsymbol{A}+10\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，则二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 可化为标准形________.

(8) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$，且 $k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，则 k 的取值范围是________.

(9) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称可逆矩阵，则能将二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为 $f=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$ 的可逆线性变换是________.

(10) 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+x_3x_4$ 的正、负惯性指数分别为________、________.

2. 单选题

(1) n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵的充要条件是 【　】

(A) $|\boldsymbol{A}|>0$；　　(B) $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值非负；

(C) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为正定矩阵；　　(D) $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n$.

(2) 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的关系是 【 】

(A) 合同且相似； (B) 合同,但不相似；

(C) 不合同,但相似； (D) 既不合同,也不相似.

(3) 三元二次型

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3$$

的正、负惯性指数分别为 【 】

(A) 2,1； (B) 1,2； (C) 1,1； (D) 3,0.

(4) 已知

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 9x_4^2 + 2t(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$

是正定二次型,则参数 t 满足的条件是 【 】

(A) $t<1$； (B) $-1<t<1$；

(C) $-\frac{1}{2}<t<0$； (D) $-\frac{1}{2}<t<1$.

(5) 已知实二次型

$$f = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)^2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)^2 + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)^2$$

正定,$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{3\times 3}$,则 【 】

(A) $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵； (B) $\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵；

(C) $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵； (D) $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵.

(6) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,则与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵是 【 】

(A) $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$； (B) $\begin{bmatrix} -2 & & \\ & -3 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$；

(C) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$； (D) $\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$.

(7) 设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+6x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-2x_1x_3=C$,则此二次曲面是 【 】

(A) $C=0$ 时为锥面； (B) $C>0$ 时为椭球面；

(C) $C<0$ 时为柱面； (D) $C=1$ 时为单叶双曲面.

(8) 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3) = ax_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2bx_2x_3$$

可通过正交变换化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$,则 ab^2 的值为 【 】

(A) 2； (B) 4； (C) 6； (D) 8.

(9) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+ax_2-2x_3)^2+(2x_2+3x_3)^2+(x_1+3x_2+ax_3)^2$正定的充分必要条件是 【 】

(A) $a<-1$; (B) $a\neq-1$; (C) $a\neq1$; (D) $a>1$.

(10) 设二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵,若二次型的秩为 r,正、负惯性指数之差为 s,则 【 】

(A) r,s 奇偶性相同,且 $|s|\leqslant r$;

(B) r,s 奇偶性相同,且 $|s|>r$;

(C) r,s 的奇偶性不同,且 $|s|\leqslant r$;

(D) r,s 的奇偶性不同,且 $|s|>r$.

3. 设二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}-\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2,$$

试求 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的矩阵.

4. 求二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(-2x_1+x_2+x_3)^2+(x_1-2x_2+x_3)^2+(x_1+x_2-2x_3)^2$$

的标准形及相应的可逆线性变换.

5. 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}1&-4&0\\-2&2&-1\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}.$$

(1) 求该二次型的秩;

(2) 将该二次型化为规范形,并写出所用的非退化线性变换.

6. 已知三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&2&0\\2&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$合同,求二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形.

7. 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+2ax_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$$

可经过正交变换化为标准形

$$f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+6y_2^2+by_3^2,$$

求参数 a,b.

8. 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+4x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+ax_1x_3-4x_2x_3$$

的秩为 2,求它的规范形.

9. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&-2\\-2&2&0\\-2&0&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2$.

(1) 求对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$,使得 $\boldsymbol{B}$ 与$\boldsymbol{\Lambda}$ 相似;

(2) 当 k 为何值时,$\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵?

10. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵,证明 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}^{-1}$仍为正定矩阵.

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是半正定矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 的特征值是非负的实数.

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实矩阵，λ 为正实数，记 $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，证明 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵.

13. 设 n 维非零列向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 满足条件 $\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_j=0(i\neq j)$，其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，证明向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性无关.

14. 设 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$是正定矩阵，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 m 阶和 n 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为 $m\times n$ 矩阵.

(1) 计算 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DP}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}$；

(2) 利用(1)的结果判断 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 是否正定，并证明你的结论.

15. 求函数

$$f(x,y,z)=\frac{2x^2+y^2-4xy-4yz}{x^2+y^2+z^2}(x^2+y^2+z^2\neq 0)$$

的最大值和最小值，并找出一个最大值点和最小值点.

单元测验

一、填空题(每小题 3 分，共 18 分)

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，且 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$，则 $|\boldsymbol{E}+3\boldsymbol{A}|=$________.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为四阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，且方程组 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只含一个解向量，则 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=$________.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶正交矩阵，已知 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{-1}$，则 $A_{11}^2+A_{12}^2+A_{13}^2=$________.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为四阶实对称矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}$，且其正、负惯性指数均为 1，则 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=$________.

5. 已知实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 化为标准形 $y_1^2-y_2^2+2y_3^2$，则 $\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=$________.

6. 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_n+a_nx_1)^2$ 为实二次型，且 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为实数，则 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足条件________时，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是正定二次型.

二、单选题(每小题 3 分，共 18 分)

1. 已知 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 2，则 $3\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}$ 的一个特征值为 【 】

(A) $\frac{1}{2}$； (B) $-\frac{3}{2}$； (C) $-\frac{4}{3}$； (D) $\frac{3}{2}$.

2. 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $0,1,-1$，则下列结论中不正确的是 【 】

(A) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是不可逆的；

(B) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元素之和为 0；

(C) 1 和 -1 所对应的特征向量是正交的；

(D) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由一个向量组成.

3. 设 λ_1,λ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个相异特征值，对应的特征向量分别为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$

线性无关的充要条件是 【 】

(A) $\lambda_1=0$; (B) $\lambda_2=0$; (C) $\lambda_1\neq 0$; (D) $\lambda_2\neq 0$.

4. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+tx_2^2+3x_3^2+2x_1x_2$,若 f 的秩为 2,则参数 t 的取值为 【 】

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{bmatrix}$,则与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵是 【 】

(A) $\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}$; (B) $\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}$;

(C) $\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}$; (D) $\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}$.

6. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶正定矩阵,则下列矩阵不是正定矩阵的是 【 】

(A) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}$; (B) $\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{A}^{-1}$;

(C) $\boldsymbol{AB}$; (D) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$.

三、(10 分) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{bmatrix}$,$|\boldsymbol{A}|=-1$,$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$为 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征向量,求 a,b,c 及 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 所对应的特征值.

四、(10 分) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵,且 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,$\lambda_1=-1$,$\lambda_2=1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值,$|\boldsymbol{B}^{-1}|=\dfrac{1}{3}$,求

$$\begin{vmatrix}-(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})^{-1}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}^*+\left(-\dfrac{1}{4}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\end{vmatrix}.$$

五、(10 分) 已知二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中各行元之和均为 3,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&3\\-1&0&-2\\0&-1&-1\end{bmatrix}$,求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,将二次型 f 化为标准形.

六、(12 分) 已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\2x_1+(a+2)x_2+(a+1)x_3=a+3,\\x_1+2x_2+ax_3=3\end{cases}$$

有无穷多解,且 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,a,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(-a,1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,a)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1=1$,$\lambda_2=-2$,$\lambda_3=-1$ 的特征向量. 求:

(1) $\boldsymbol{A}$;

(2) $|\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}|$.

七、(12 分)　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维非零列向量，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$.

(1) 证明$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关；

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

八、(10 分)　设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是存在实矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 正定.

习题选解

(A)

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个相似的实对称矩阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.

证　由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征值. 又因 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵，故存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$，使 $\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{\Lambda}$，其中对角矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$ 的主对角元是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值；存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}_2$，使 $\boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{\Lambda}$. 这表明 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都与$\boldsymbol{\Lambda}$ 合同，从而由合同的对称性和传递性知 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.

7. 设实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$$

经正交变换化成标准形 $f(y_1,y_2,y_3)=y_2^2+2y_3^2$，求常数 a,b.

解　二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&a&1\\a&1&b\\1&b&1\end{bmatrix},$$

由条件知 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 0,1,2，因此

$$0=|\boldsymbol{A}|=-(b-a)^2,\quad 0=|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=-2ab,$$

解得 $a=b=0$.

11. 用正交变换法、配方法和合同初等变换法化二次型

$$f=2x_1^2+3x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2$$

为标准形和规范形.

解　(1) 正交变换法. 二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{bmatrix},$$

容易求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$，故用正交变换法所得标准形为 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

再做可逆线性变换，得规范形 $f=z_1^2+z_2^2+z_3^2$.

(2) 配方法. 经过配方得

$$f=2x_1^2+3\left(x_2+\frac{2}{3}x_3\right)^2+\frac{5}{3}x_3^2,$$

取可逆线性变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2 + \frac{2}{3}x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases}$$

得二次型 f 的标准形 $f=2y_1^2+3y_2^2+\frac{5}{3}y_3^2$.

取可逆线性变换

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{2}x_1, \\ z_2 = \sqrt{3}\left(x_2 + \frac{2}{3}x_3\right), \\ z_3 = \sqrt{\frac{5}{3}}x_3, \end{cases}$$

得二次型 f 的规范形 $f=z_1^2+z_2^2+z_3^2$.

(3) 合同初等变换法. 对二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 做合同初等变换

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-\frac{2}{3}r_2]{c_3-\frac{2}{3}c_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{\sqrt{3}}r_2,\ \sqrt{\frac{3}{5}}c_3,\ \sqrt{\frac{3}{5}}r_3]{\frac{1}{\sqrt{2}}c_1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}r_1,\ \frac{1}{\sqrt{3}}c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{15}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} \end{bmatrix},$$

取

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{15}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}} \end{bmatrix},$$

因此经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{y}$ 将二次型 f 化为标准形 $f=2y_1^2+3y_2^2+\frac{5}{3}y_3^2$. 经可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{z}$ 将二次型 f 化为规范形 $f=z_1^2+z_2^2+z_3^2$.

13. 已知实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3 \quad (a>0)$$

经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 化成标准形 $f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$,求参数 a 及正交变换矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

解 实二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{bmatrix},$$

从而

$$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda-3-a)(\lambda-3+a),$$

因为 $a>0$，且 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$，所以 $a=2$.

容易求得 A 的对应于 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$ 的特征向量分别为

$$p_1=(0,-1,1)^T,\quad p_2=(1,0,0)^T,\quad p_3=(0,1,1)^T,$$

上述三个向量已经两两正交，只需单位化，得

$$q_1=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,\quad q_2=(1,0,0)^T,\quad q_3=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T,$$

则有正交变换矩阵 $Q=[q_1\quad q_2\quad q_3]$.

15. 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2.

(1) 求参数 c 及二次型的矩阵的特征值；

(2) 指出方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种曲面.

解 (1) 二次型的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{bmatrix},$$

由 rank $A=2$ 知 $|A|=0$，解得 $c=3$. 从而 $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$，求得 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9$.

(2) 通过正交变换可以将二次型化为标准形 $f=4y_1^2+9y_2^2$，故 $f=1$ 为椭圆柱面.

16. 已知三元实二次型 x^TAx 经正交变换化为 $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$，且 $A^*\alpha=\alpha$，其中 $\alpha=(1,1,-1)^T$，A^* 为 A 的伴随矩阵，求此二次型的表达式.

解 由条件知三元实二次型 x^TAx 的矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=-1$，从而 $|A|=2\times(-1)\times(-1)=2$，于是 A^* 的特征值为 $1,-2,-2$.

由于 α 是 A^* 的特征值 1 对应的特征向量，因此 α 是 A 的特征值 2 对应的特征向量. 而实对称矩阵 A 的特征值 -1 对应的特征向量 $\beta=(x_1,x_2,x_3)^T$ 必与 α 正交，即 $x_1+x_2-x_3=0$，得基础解系 $\beta_1=(-1,1,0)^T,\beta_2=(1,0,1)^T$. 记 $P=[\alpha\quad\beta_1\quad\beta_2]$，则

$$A=P\begin{bmatrix}2&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&-1\\-1&-1&0\end{bmatrix},$$

所以二次型的表达式为 $f=2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$.

19. 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(1) 当 a 取何值时，二次型 f 是正定的；

(2) 当 a 取何值时，二次型 f 是负定的.

解 实二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}a&1&1\\1&a&-1\\1&-1&a\end{bmatrix},$$

其顺序主子式为

$$a,\quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2-1,\quad \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a^3-3a-2.$$

（1）若二次型 f 是正定的，则 $a>0, a^2-1>0, a^3-3a-2>0$，因此 $a>2$；

（2）若二次型 f 是负定的，则 $a<0, a^2-1>0, a^3-3a-2<0$，于是 $a<-1$.

20. 对任意实数 $a,b>0$，试证：

（1）当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为半正定时，$a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}$ 也半正定；

（2）当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 中一个正定、另一个半正定时，$a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}$ 正定.

解　（1）由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 半正定可知，$a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵，且对于任何 n 维实向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\geqslant 0, \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\geqslant 0$，从而由 $a,b>0$ 有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}\geqslant 0$，即 $a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}$ 也半正定.

（2）不妨设 $\boldsymbol{A}$ 正定，$\boldsymbol{B}$ 半正定，则对于任何 n 维实向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0, \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\geqslant 0$，因此 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}>0$. 而 $a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵，故 $a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}$ 正定.

21. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 实矩阵，试证当 $t>0$ 时，$\boldsymbol{B}=t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

证　易知 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实对称矩阵，且对任意 n 维实向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，由 $t>0$ 有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = t\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2>0,$$

因此 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

22. 设 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-6\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

解　设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，则由 $\boldsymbol{A}^2-6\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ 可得 $\lambda^2-6\lambda+4=0$，解得 $\lambda_1=3+\sqrt{5}$，或 $\lambda_2=3-\sqrt{5}$，即知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为正数. 而 $\boldsymbol{A}$ 又是实对称矩阵，因此 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

（B）

23. 设实二次型 $f=\sum_{i=1}^{m}(a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n)^2$，令 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，证明二次型 f 的秩等于 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$.

解　令 $y_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n(1\leqslant i\leqslant n)$，则

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

从而

$$f=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

故实二次型 f 的秩等于 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$.

又因为 $\boldsymbol{A}$ 为实矩阵，所以由主教材中例 4.10 可知 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$，即实二次型 f 的秩等于 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$.

24. 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$ 为 n 阶实对称矩阵，$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n$，$A_{ij}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中元 a_{ij} 的代数余子式

$(i,j=1,2,\cdots,n)$,二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|\boldsymbol{A}|}x_ix_j$.

(1) 记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,把 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$写成矩阵形式,并证明二次型 $f(\boldsymbol{x})$的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

(2) 二次型 $g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与 $f(\boldsymbol{x})$的规范形是否相同?说明理由.

解 (1) 由于

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{1j}}{|\boldsymbol{A}|}x_j\right)x_1+\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{2j}}{|\boldsymbol{A}|}x_j\right)x_2+\cdots+\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{nj}}{|\boldsymbol{A}|}x_j\right)x_n$$

$$=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{1j}x_j & \sum\limits_{j=1}^{n}A_{2j}x_j & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n}A_{nj}x_j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},$$

因此二次型的矩阵为

$$\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{A}^{-1}.$$

(2) 由于实二次型 $g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经正交变换可化为标准形

$$g=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,因此 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$ 通过正交变换可化为标准形

$$f=\frac{1}{\lambda_1}z_1^2+\frac{1}{\lambda_2}z_2^2+\cdots+\frac{1}{\lambda_n}z_n^2.$$

显然实二次型 f,g 具有相同的正、负惯性指数,于是具有相同的规范形.

25. 设四元二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{bmatrix},$$

(1) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值为 3,求 y;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵.

解 (1) $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda^2-1)(\lambda^2-(2+y)\lambda+2y-1),$$

由 $\lambda=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值可知

$$(3^2-1)(3^2-(2+y)3+2y-1)=0,$$

解得 $y=2$.

(2) 令

$$B = A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

不难求得 B 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1,\lambda_4=9$,以及它们依次对应的特征向量

$$p_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}},\quad p_2=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}},$$

$$p_3=(0,0,-1,1)^{\mathrm{T}},\quad p_3=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

这四个向量已经两两正交,只需单位化,得

$$q_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}},\quad q_2=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}},$$

$$q_3=\left(0,0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}},\quad q_4=\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

取 $Q=[q_1\quad q_2\quad q_3\quad q_4]$,则 Q 为正交矩阵,且

$$(AQ)^{\mathrm{T}}(AQ)=\mathrm{diag}(1,1,1,9).$$

26. 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}Ax=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$,且矩阵 A 的特征值之和为 1,特征值之积为 -12.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准形,并写出所用正交变换的矩阵.

解 (1) 实二次型的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

由题设知 $\mathrm{tr}\,A=1,|A|=-12$,即有

$$a+2+(-2)=1,\quad 2(-2-b^2)=-12,$$

利用 $b>0$ 可解得 $a=1,b=2$.

(2) 不难求得 A 的特征值 $\lambda_1=-3,\lambda_2=\lambda_3=2$,以及它们依次对应的特征向量

$$p_1=(1,0,-2)^{\mathrm{T}},\quad p_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad p_3=(2,0,1)^{\mathrm{T}},$$

上述三个向量两两正交,只需单位化,得

$$q_1=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}},\quad q_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad q_3=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

令 $Q=[q_1\quad q_2\quad q_3]$,做正交变换 $x=Qy$ 可得标准形 $f=-3y_1^2+2y_2^2+2y_3^2$.

27. 设 A 为 n 阶正定矩阵,证明存在正定矩阵 B,使 $A=B^2$.

解 因 A 为正定矩阵,故 A 的所有特征值 $\lambda_j>0(1\leqslant j\leqslant n)$,且存在可逆矩阵 P,使得

$$\begin{aligned} A &= P\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)P^{-1} \\ &= P\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots\sqrt{\lambda_n})P^{-1}P\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})P^{-1}, \end{aligned}$$

令 $B=P\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})P^{-1}$,则 B 的正惯性指数为 n,即 B 是正定矩阵,且 $A=B^2$.

28. 设 A 为 m 阶正定矩阵,B 为 $m\times n$ 实矩阵,试证:$B^{\mathrm{T}}AB$ 为正定矩阵当且仅当 $\mathrm{rank}\,B=n$.

证 易知 $B^{\mathrm{T}}AB$ 为 n 阶实对称矩阵. 由 A 为正定矩阵知,$B^{\mathrm{T}}AB$ 为正定矩阵当且仅当对

任意 m 维向量 $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$,有

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y})>0.$$

上式成立的充要条件是对任意 n 维向量 $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$,有 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$,这又等价于齐次线性方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 只有零解,即 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=n$.

29. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实对称矩阵,证明:存在 n 阶可逆实矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$ 均为对角矩阵.

证 由 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵知,存在 n 阶可逆实矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$. 而 $\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵,故 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 是实对称矩阵,于是存在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵. 令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}$,则 $\boldsymbol{P}$ 是 n 阶可逆实矩阵,且

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q})=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E},$$
$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q})=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda},$$

因此存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$ 均为对角矩阵.

30. 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$ 为正定矩阵,$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为非零实数,记 $\boldsymbol{B}=[a_{ij}b_ib_j]_{n\times n}$,证明 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

证 因为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11}b_1^2 & a_{12}b_1b_2 & \cdots & a_{1n}b_1b_n \\ a_{21}b_2b_1 & a_{22}b_2^2 & \cdots & a_{2n}b_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_nb_1 & a_{n2}b_nb_2 & \cdots & a_{nn}b_n^2 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix},$$

所以由 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵知 $\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵,并且 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶顺序主子式为

$$|\boldsymbol{B}_k|=\left|\begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_k \end{bmatrix}\right|$$
$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\prod_{i=1}^{k}b_i^2.$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵,因此 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶顺序主子式满足

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}>0,$$

又由题设,有 $\prod\limits_{i=1}^{k}b_i^2>0$,从而 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶顺序主子式满足 $|\boldsymbol{B}_k|>0$,故 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

31. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵，$\boldsymbol{b}$ 为 n 维实向量，求二次函数

$$g(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

的最小值.

解 设

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n\times n}, \quad \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}},$$

则

$$g(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j - \sum_{k=1}^{n} b_k x_k,$$

因此

$$\nabla g(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j - b_1 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}x_j - b_2 \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}x_j - b_n \end{bmatrix},$$

即 $\nabla g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$，并且

$$\nabla^2 g(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{\partial^2 g(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{n\times n} = [a_{ij}]_{n\times n} = \boldsymbol{A}.$$

令 $\nabla g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$，得 $g(\boldsymbol{x})$ 的唯一驻点 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. 而 $\nabla^2 g(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，故 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $g(\boldsymbol{x})$ 的唯一极小值点，从而 $\boldsymbol{x}_0$ 为 $g(\boldsymbol{x})$ 的唯一最小值点，最小值为

$$g(\boldsymbol{x}_0) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

期末考试

期末考试题(一)

一、填空题(每小题 3 分,共 18 分)

1. 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$,且正整数 $n\geqslant 2$,则 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=$________.

2. 已知 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&2\\3&1&0\\5&2&0\end{bmatrix}$,则 $\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^*\right)^{-1}=$________.

3. 已知四阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 和 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$,且 $|\boldsymbol{A}|=4$,$|\boldsymbol{B}|=1$,则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$________.

4. 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{3\times 3}$ 是正交矩阵,且 $\boldsymbol{b}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$,$a_{11}=1$,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有一个解是________.

5. 设 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,1$,则当且仅当 λ ________时,$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵.

6. 线性空间 $V=\{\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}\,|\,\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵$\}$的维数为________.

二、单选题(每小题 3 分,共 18 分)

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a&1\\2&b\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换的充要条件是 【 】

(A) $a=b-1$; (B) $a=b+1$; (C) $a=b$; (D) $a=2b$.

2. 设 n 阶非零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{0}$,则 【 】

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆; (B) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆;

(C) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆; (D) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

3. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵,给定下面四个命题:

① 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解,则 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\geqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$;

② 若 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\geqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解;

③ 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解,则 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$;

④ 若 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解,

则上述命题正确的是 【 】

(A) ①②；　　(B) ①③；　　(C) ②④；　　(D) ③④.

4. 设 $n(n\geqslant 2)$阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*$，互换 $\boldsymbol{A}$ 的第一行与第二行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，则　　【　】

(A) 互换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第一列与第二列得到 $\boldsymbol{B}^*$；

(B) 互换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第一行与第二行得到 $\boldsymbol{B}^*$；

(C) 互换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第一列与第二列得到 $-\boldsymbol{B}^*$；

(D) 互换 $\boldsymbol{A}^*$ 的第一行与第二行得到 $-\boldsymbol{B}^*$.

5. 已知$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同解，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，k_1,k_2 为任意常数，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解必是　　【　】

(A) $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2}{2}$；　　(B) $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2}{2}$；

(C) $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2}{2}$；　　(D) $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2}{2}$.

6. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是四阶矩阵，且 $\mathrm{rank}(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$，则 $\lambda=3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的　　【　】

(A) 一重特征值；　　(B) 二重特征值；

(C) k 重特征值，$k\geqslant 2$；　　(D) k 重特征值，$k\leqslant 2$.

三、(10 分)　计算 n 阶行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ x & 1 & 2 & \cdots & n-1\\ x & x & 1 & \cdots & n-2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x & x & x & \cdots & 1\end{vmatrix}.$$

四、(10 分)　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

五、(10 分)　已知齐次方程组(Ⅰ)的基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\5\\7\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}3\\-1\\1\\7\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\3\\4\\20\end{bmatrix},$$

齐次方程组(Ⅱ)的基础解系为

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\4\\7\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\-3\\-4\\2\end{bmatrix},$$

试求方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)的公共解.

六、(10 分)　设 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ 分别是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_1,λ_2 的特征向量，$\lambda_1\neq\lambda_2$，证明 $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$ 必不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

七、(12 分) 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\a\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\a+1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\2a\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}.$$

试问当 a 为何值时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 等价?当 a 为何值时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不等价?

八、(12 分) 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+6x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3\quad (a>0)$$

通过正交变换可以化为标准形 $7y_1^2+7y_2^2-2y_3^2$,求参数 a 及所用的正交变换.

期末考试题(二)

一、填空题(每小题 3 分,共 18 分)

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 Euclid 空间的标准正交基,则向量 $2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$ 的长度为________.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}}\\ a & b & -\frac{4}{3\sqrt{2}}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}}\end{bmatrix}$ 为正交矩阵,则 $ab=$________.

3. 若实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$ 为正定二次型,则 λ 的取值范围为________.

4. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是非齐次方程组 $\boldsymbol{A}_{2\times3}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的两个线性无关的解,且 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2$. 若 $\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}_1+l\boldsymbol{\alpha}_2$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解,则常数 k,l 须满足关系式________.

5. 设 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$,且 $\lambda=1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一重特征值,则行列式 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=$________.

6. 设 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一行元之和都等于常数 $a\neq0$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的每一行元之和为________.

二、单选题(每小题 3 分,共 18 分)

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的第二行乘以 2 得到矩阵 $\boldsymbol{B}$,则 【 】

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}$的第二行乘以 2 为 $\boldsymbol{B}^{-1}$; (B) $\boldsymbol{A}^{-1}$的第二列乘以 2 为 $\boldsymbol{B}^{-1}$;

(C) $\boldsymbol{A}^{-1}$的第二行乘以$\frac{1}{2}$为 $\boldsymbol{B}^{-1}$; (D) $\boldsymbol{A}^{-1}$的第二列乘以$\frac{1}{2}$为 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

2. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关,以下命题中错误的是 【 】

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能被$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示; (B) $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不能被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示;

(C) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示; (D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

3. 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$,则二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2$ 的矩阵为 【 】

(A) $\boldsymbol{A}$; (B) $\boldsymbol{A}^2$; (C) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$; (D) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为四阶矩阵,且 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=4$,$\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=3$,$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*$ 和 $\boldsymbol{B}^*$,则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*)$等于 【 】

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

5. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是向量空间 V 的一个基,则下面向量组中为 V 的基的是 【 】

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$; (B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$;

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$; (D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$.

6. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=-6$,对应于 λ_1,λ_2 的特征向量分别为 $\boldsymbol{p}_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{p}_2=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$ 应当 【 】

(A) 是对应于 $\lambda_1=0$ 的特征向量；　　(B) 是对应于 $\lambda_2=3$ 的特征向量；

(C) 是对应于 $\lambda_3=-6$ 的特征向量；　　(D) 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

三、(10 分)　计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n+x_n \\ 1 & 2 & \cdots & (n-1)+x_{n-1} & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2+x_2 & \cdots & n-1 & n \\ 1+x_1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix},$$

其中 $x_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$.

四、(10 分)　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$满足关系式 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，试求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

五、(10 分)　判定向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \\ -8 \end{bmatrix}$$

的线性相关性，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

六、(10 分)　设线性方程组为$\begin{cases} x_1-3x_2-x_3=0, \\ x_1-4x_2+ax_3=b, \\ 2x_1-x_2+3x_3=5, \end{cases}$问 a,b 取何值时，方程组无解、有唯一解、有无穷多解？在有无穷多解时求出其通解.

七、(12 分)　将实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_1$ 用正交变换化为标准形，并写出所用的正交变换.

八、(12 分)　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$ 是 m 维实列向量，证明：

(1) $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$；

(2) 线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 有解.

期末考试题(三)

一、填空题(每小题 3 分,共 18 分)

1. 设 $D=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$,则 $M_{12}+A_{21}-M_{32}=$________.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}$,其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}$ 皆为可逆矩阵,则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$________.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$,$n$ 为正整数,则 $\boldsymbol{A}^n=$________.

4. 已知向量空间 $V=\{(2a,2b,3b,3a)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$,则 V 的维数是________.

5. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}$ 的特征值 2 的几何重数是________.

6. 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$ 的秩为________.

二、单选题(每小题 3 分,共 18 分)

1. 在四阶行列式 $\det[a_{ij}]$ 的展开式中含有因子 a_{31} 的项共有 【 】

(A) 4 项; (B) 6 项; (C) 8 项; (D) 10 项.

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵,且 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列元素全为零,则下列结论正确的是 【 】

(A) $\boldsymbol{AB}$ 的第 j 列元全等于零; (B) $\boldsymbol{AB}$ 的第 j 行元全等于零;

(C) $\boldsymbol{BA}$ 的第 j 列元全等于零; (D) $\boldsymbol{BA}$ 的第 j 行元全等于零.

3. 设 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩为 3,且满足 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3-3\boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_4$,则该向量组的一个极大线性无关组为 【 】

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$; (B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$;

(C) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$; (D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$.

4. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵,给定以下命题:

①$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价; ② $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似; ③ $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

下列命题正确的是 【 】

(A) ①⇒②⇒③; (B) ②⇒①⇒③;

(C) ③⇒②⇒①; (D) 以上结论均不正确.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\sim\boldsymbol{D}$,则下列命题正确的是 【 】

(A) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}$; (B) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}$;

(C) $\boldsymbol{A}^2\sim\boldsymbol{B}^2$; (D) $\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{CD}$.

6. 如果 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵,那么 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}$ 一定为 【 】

(A) 反对称矩阵; (B) 正交矩阵;

(C) 对称矩阵; (D) 对角矩阵.

三、(10 分)　设 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ -1 & 1 & 1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & 1 \\ & & & -1 & 1 \end{vmatrix},$$

证明

$$D_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

四、(10 分)　求 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ 的逆.

五、(10 分)　求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=4, \\ 3x_1+8x_2-2x_3=13, \\ 4x_1-x_2+9x_3=-6, \\ x_1-2x_2+4x_3=-5. \end{cases}$$

六、(10 分)　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值，$|\boldsymbol{B}^{-1}|=\frac{1}{3}$，求行列式

$$\begin{vmatrix} -(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^*+\left(-\frac{1}{4}\boldsymbol{B}\right)^{-1} \end{vmatrix}.$$

七、(12 分)　求一个可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将二次型 f 化成二次型 g，其中

$$f=2x_1^2+9x_2^2+3x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3-10x_2x_3,$$
$$g=2y_1^2+3y_2^2+6y_3^2-4y_1y_2-4y_1y_3+8y_2y_3.$$

八、(12 分)　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，证明 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$ 的充要条件是

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=n.$$

期末考试题(四)

一、填空题(每小题 3 分,共 18 分)

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & k & -2\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -3\end{bmatrix}$,行列式 $|3\boldsymbol{A}|=27$,则参数 $k=$________.

2. 矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 的逆矩阵为________.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是正负惯性指数均为 1 的三阶实对称矩阵,且满足 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$,则行列式 $|2\boldsymbol{E}+3\boldsymbol{A}|=$________.

4. 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2bx_2x_3$ 可通过正交变换化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$,则 $ab^2=$________.

5. 已知 $\boldsymbol{A}_1=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2^{-1}\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}^*$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵,则 $|\boldsymbol{B}^*|=$________.

6. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(3,2,0,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,0,\lambda,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,4,-1)^{\mathrm{T}}$ 线性相关,则 $\lambda=$________.

二、单选题(每小题 3 分,共 18 分)

1. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足关系式 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$,则必有 【　】

(A) $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$;　(B) $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$;　(C) $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$;　(D) $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是向量空间 $\mathbb{R}^2$ 的两个基,且 $\boldsymbol{\beta}_1=-5\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2$,$\boldsymbol{\beta}_2=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,则由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的过渡矩阵是 【　】

(A) $\begin{bmatrix}0 & -4\\ 1 & -6\end{bmatrix}$;　(B) $\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & -5\end{bmatrix}$;

(C) $\begin{bmatrix}5 & 2\\ -3 & -1\end{bmatrix}$;　(D) $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(3,-2,b,-2)^{\mathrm{T}}$,已知 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,则 【　】

(A) $b=2$;　(B) $b\neq2$;　(C) $a=1$;　(D) $a\neq1$.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵,$|\boldsymbol{A}|=-4$,且 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 【　】

(A) $-2,-2,4$;　(B) $-2,4,4$;　(C) $2,2,-4$;　(D) $2,-4,-4$.

5. 下列 4 个矩阵中,正定矩阵是 【　】

(A) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix}$;　(B) $\begin{bmatrix}-9 & 2 & 0\\ 2 & -6 & 0\\ 0 & 0 & -10\end{bmatrix}$;

(C) $\begin{bmatrix}-3 & 4 & 0\\ 4 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{bmatrix}$;　(D) $\begin{bmatrix}6 & 2 & 0\\ 2 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$.

6. 设 $\boldsymbol{A}_{4\times4}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_4]$，$\boldsymbol{\xi}_1=(-2,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，$\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 2 的特征向量，则以下命题中错误的是 【 】

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关； (B) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\eta}$ 线性无关； (D) $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\eta}$ 线性无关.

三、(10 分) 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n\\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n\end{vmatrix}.$$

四、(10 分) 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1,\\ 3x_1-3x_2+x_3-3x_4=4,\\ x_1+4x_2-3x_3+5x_4=-2.\end{cases}$$

五、(10 分) 设 n 维非零列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 满足条件 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j=0(i\neq j)$，其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

六、(10 分) 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\1&6&1\end{bmatrix}$，求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{X}$.

七、(12 分) 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]$，$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$. 已知 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&-2&-3\\k&4&6\end{bmatrix}$，试根据 k 的不同取值求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组线性表示.

八、(12 分) 已知三元二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 经正交变换化为 $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足方程

$$\left[\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right)^*\right]^{-1}\boldsymbol{BA}^{-1}=2\boldsymbol{AB}+4\boldsymbol{E},$$

且 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，求二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}$ 的表达式.

同步练习参考解答

第 1 章

1. 填空题

(1) $x_1=2, x_2=0, x_3=-2$； (2) 1； (3) 4； (4) 0； (5) -5.

2. $a=1$,三条直线交于点(2,1).

3. (1) 方程组有唯一解：$x_1=2, x_2=0, x_3=-1$；

(2) 方程组的通解为 $x_1=x_3+4, x_2=x_3+3, x_3=x_3, x_4=-3$,其中 x_3 为任意数.

4. (1) 方程组的通解为 $x_1=3x_3-4x_4, x_2=-2x_3+3x_4, x_3=x_3, x_4=x_4$,其中 x_3, x_4 为任意数.

(2) 方程组的通解为 $x_1=8x_3-7x_4, x_2=-6x_3+5x_4, x_3=x_3, x_4=x_4$,其中 x_3, x_4 为任意数.

5. 对方程组做初等变换：

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+bx_2+x_3=0, \\ x_1+2bx_2+x_3=0. \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1+bx_2+x_3=0, \\ bx_2=0, \\ (1-ab)x_2+(1-a)x_3=0. \end{cases}$$

(1) 当 $b=0$ 时,方程组有非零解

$$\begin{cases} x_1=-x_3, \\ x_2=(a-1)x_3, \end{cases} \quad x_3 \text{ 为任意数.}$$

(2) 当 $a=1$ 时,方程组有非零解

$$\begin{cases} x_1=-x_3, \\ x_2=0, \end{cases} \quad x_3 \text{ 为任意数.}$$

6. 对方程组做初等变换：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_2+2x_3+2x_4=1, \\ x_2+(3-a)x_3+2x_4=b, \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1, \end{cases} \to \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_2+2x_3+2x_4=1, \\ (a-1)x_3=1-b, \\ (a-1)x_4=0. \end{cases}$$

(1) 当 $a\neq1$ 时,方程组有唯一解

$$x_1=\frac{a+b-2}{1-a},\quad x_2=\frac{-a-2b+3}{1-a},\quad x_3=\frac{b-1}{1-a}, x_4=0.$$

(2) 当 $a=1,b\neq1$ 时,方程组无解.

(3) 当 $a=1,b=1$ 时,方程组可化为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_2+2x_3+2x_4=1, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 \quad -x_3-x_4=-1, \\ x_2+2x_3+2x_4=1, \end{cases}$$

则方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = x_3+x_4-1, \\ x_2 =-2x_3-2x_4+1, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4, \end{cases} \quad x_3,x_4 \text{ 为任意数}.$$

7. 由题意,得方程组

$$\begin{cases} x_1 \quad -6x_3 \quad =0, \\ 2x_2-12x_3 \quad =0, \\ 2x_1+x_2-6x_3-2x_4=0. \end{cases}$$

用消元法得方程组的通解

$$\begin{cases} x_1=6x_3, \\ x_2=6x_3, \\ x_3=x_3, \\ x_4=6x_3. \end{cases} \quad x_3 \text{ 为任意数}.$$

因此配平的化学方程式为



$$6CO_2+6H_2O = C_6H_{12}O_6+6O_2.$$

第 2 章

1. 填空题

(1) $\frac{1}{9}(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$; (2) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$; (4) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$;

(5) 3; (6) 1; (7) -3; (8) 1; (9) 2; (10) 3.

2. 单选题

(1) C; (2) D; (3) C; (4) A; (5) D; (6) C;
(7) A; (8) D; (9) D; (10) B.

3. 因为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{BC} &= (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) \\ &= \boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \\ &= \boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}, \end{aligned}$$

而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\dfrac{1}{2}$,所以 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{E}$.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$与 $\boldsymbol{A}$ 可交换,即

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

从而

$$\begin{cases} a=a+3b, \\ b=2b, \\ 3a+2c=c+3d, \\ 3b+2d=2d, \end{cases}$$

解得 $b=0,c=3(d-a)$,于是与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 3(d-a) & d \end{bmatrix},\quad a,d\text{ 为任意数}.$$

5. 由$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,得 $4\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$,即$(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})^2=\boldsymbol{E}$,所以 $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}$ 可逆.

6. 将 $\boldsymbol{A}$ 分块为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}$,其中$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. 因为

$$\boldsymbol{A}_1^2=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_1^4=\begin{bmatrix} 5^4 & 0 \\ 0 & 5^4 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_2^2=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 2^3 & 2^2 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2^4=\begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 2^3 & 2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 2^3 & 2^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2^4 & 0 \\ 2^6 & 2^4 \end{bmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{A}^4=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1^4 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2^4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^4 & 0 \\ 0 & 0 & 2^6 & 2^4 \end{bmatrix}.$$

7. 因为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}+\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

而$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(-1,1,1)(-1,1,-2)^{\mathrm{T}}=0$,于是$(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^n=\boldsymbol{0}(n\geqslant 2)$,所以

$$\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^n=\boldsymbol{E}+\mathrm{C}_n^1\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 1-n & n & n \\ n & 1-n & -n \\ -2n & 2n & 1+2n \end{bmatrix}.$$

8. 由已知条件得 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=3$,故 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵,并且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$,从而

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{-1}.$$

利用初等变换法求得$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,所以 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

9. (1) 因 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$,故 $\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=4\boldsymbol{E}$,即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=4\boldsymbol{E},$$

于是

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\cdot\frac{1}{4}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E},$$

故 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆,且 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{4}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

还可以这样做:由 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$,得 $2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{A}$,即 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=4\boldsymbol{A}$,于是

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\cdot\frac{1}{4}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E},$$

故 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆,且 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{4}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$.这个结果与上一种解法不同.

(2) 由 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$,知 $2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})$,于是

$$\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}.$$

不难求得

$$(\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

因此

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}.$$

10. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b\\ 3 & 2 & 1 & a & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1\\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0\end{bmatrix}$,

从而当 $a=1,b=-1$ 时,$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2$.

11. 对方程组的增广矩阵进行行初等变换,得

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & b\\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0\\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & -5 & a-b\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & b\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-3a\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b+2-5a\end{bmatrix}.$$

令

$$\begin{cases}b-3a=0,\\ b+2-5a=0,\end{cases}$$

解得 $a=1,b=3$. 从而当 $a\neq 1$ 或 $b\neq 3$ 时,方程组无解;当 $a=1$ 且 $b=3$ 时,方程组有无穷多组解,原方程组的通解表达式为

$$\boldsymbol{x}=k_1\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{bmatrix},\quad k_1,k_2,k_3\text{ 为任意数.}$$

12. 由 $\boldsymbol{\eta}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解,可知 $a=c$. 做初等行变换,得

$$[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}2&1&1&2&0\\0&1&3&1&1\\1&a&c&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&0&-2&1&-1\\0&1&3&1&1\\0&0&1-2a&\frac{1}{2}-a&\frac{1}{2}-a\end{bmatrix}.$$

(1) 当 $a\neq\frac{1}{2}$ 时,有

$$[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]\to\begin{bmatrix}2&0&-2&1&-1\\0&1&3&1&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

于是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=k\begin{bmatrix}-2\\1\\-1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix},\quad k\text{ 为任意数.}$$

(2) 当 $a=\frac{1}{2}$ 时,有

$$[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]\to\begin{bmatrix}2&0&-2&1&-1\\0&1&3&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&3&1&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

此时方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\begin{bmatrix}1\\-3\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\2\\0\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix},\quad k_1,k_2\text{ 为任意数.}$$

第 3 章

1. 填空题

(1) -7; (2) 4; (3) 81; (4) $\frac{9^n a}{b}$; (5) 3^k; (6) 1; (7) 3;

(8) $-\frac{1}{8}$； (9) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$； (10) $\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

2. 单选题

(1) D； (2) D； (3) D； (4) D； (5) B； (6) B；

(7) C； (8) D； (9) A； (10) B.

3. (1)
$$\begin{vmatrix} a-x & a-y & a-z \\ b-x & b-y & b-z \\ c-x & c-y & c-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & a-x & a-y & a-z \\ 0 & b-x & b-y & b-z \\ 0 & c-x & c-y & c-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & a & a & a \\ 1 & b & b & b \\ 1 & c & c & c \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & x & y-x & z-x \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 & 0 \end{vmatrix} = (y-x)\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 1 & c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(2)
$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-b^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 2a-2b & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} (a+b)(a-b) & b(a-b) \\ 2(a-b) & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3.$$

4.
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x^4.$$

5. 设 n 为奇数，$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$为 n 阶反对称矩阵，则
$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = -|\boldsymbol{A}|,$$

从而 $|\boldsymbol{A}|=0$.

6.（1）行列式按第一列展开，得

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ (-1)^n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & a \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}(-1)^n \begin{vmatrix} 1 & & & 0 \\ a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & 1 \end{vmatrix}.$$

$$= a^n - 1.$$

（2）
$$\begin{vmatrix} x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1-x & x-a_2 & \cdots & 0 \\ a_1-x & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1-x & 0 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x+\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{x-a_1}{x-a_i}a_i & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & x-a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a_n \end{vmatrix}$$

$$= \left(x+\sum_{i=2}^{n}\frac{x-a_1}{x-a_i}a_i\right)\prod_{i=2}^{n}(x-a_i).$$

（3）
$$\begin{vmatrix} x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1^2+1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ 0 & x_2x_1 & x_2^2+1 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2+1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1+\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

$$
(4)\ D_n(x,y)=\begin{vmatrix} a_n & x & \cdots & x & x \\ y & a_{n-1} & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y & y & \cdots & a_2 & x \\ y & y & \cdots & y & a_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_n-y+y & x & \cdots & x & x \\ 0+y & a_{n-1} & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0+y & y & \cdots & a_2 & x \\ 0+y & y & \cdots & y & a_1 \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_n-y & x & \cdots & x & x \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & y & \cdots & a_2 & x \\ 0 & y & \cdots & y & a_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y & x & \cdots & x & x \\ y & a_{n-1} & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y & y & \cdots & a_2 & x \\ y & y & \cdots & y & a_1 \end{vmatrix}
$$

$$
=(a_n-y)D_{n-1}(x,y)+y\begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x & x \\ 1 & a_{n-1} & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & y & \cdots & a_2 & x \\ 1 & y & \cdots & y & a_1 \end{vmatrix}
$$

$$
=(a_n-y)D_{n-1}(x,y)+y\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_{n-1}-x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & y-x & \cdots & a_2-x & 0 \\ 1 & y-x & \cdots & y-x & a_1-x \end{vmatrix}
$$

$$
=(a_n-y)D_{n-1}(x,y)+y\prod_{i=1}^{n-1}(a_i-x),
$$

即

$$
D_n(x,y)=(a_n-y)D_{n-1}(x,y)+y\prod_{i=1}^{n-1}(a_i-x),
$$

因为 $D_n(x,y)=D_n(y,x)$，所以

$$
D_n(x,y)=(a_n-x)D_{n-1}(x,y)+x\prod_{i=1}^{n-1}(a_i-y),
$$

由上两式消去 $D_{n-1}(x,y)$，得

$$
D_n(x,y)=\frac{y\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)-x\prod_{i=1}^{n}(a_i-y)}{y-x}.
$$

7. 因为$\boldsymbol{A}^*=[A_{ji}]_{3\times3}=[a_{ji}]_{3\times3}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，所以$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$. 又$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^2$，故$|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}|$，即$|\boldsymbol{A}|(|\boldsymbol{A}|-1)=0$，因此$|\boldsymbol{A}|=0$ 或$|\boldsymbol{A}|=1$. 由 $a_{11}\neq0$ 有

$$
|\boldsymbol{A}|^2=a_{11}\boldsymbol{A}_{11}+a_{12}\boldsymbol{A}_{12}+a_{13}\boldsymbol{A}_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2\neq0,
$$

从而$|\boldsymbol{A}|\neq0$，即 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且$|\boldsymbol{A}|=1$.

8. 因为 $|\boldsymbol{A}_2|=|2\boldsymbol{\alpha}\quad 3\boldsymbol{\beta}\quad \boldsymbol{\gamma}|=6|\boldsymbol{\alpha}\quad \boldsymbol{\beta}\quad \boldsymbol{\gamma}|=6|\boldsymbol{A}_1|=12$，所以有

$$
\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{0} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{vmatrix}=-|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|=-24.
$$

9. 由已知，$|\boldsymbol{A}|=4$，且$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$得$(\boldsymbol{A}^*-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}$，即

$$\boldsymbol{X}=(4\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{2}(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}.$$

10. 由$|\boldsymbol{A}^{-1}|=-2$得$|\boldsymbol{A}|=-\frac{1}{2}$；又$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$，即

$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&2&3\\0&1&-1&1\\1&2&0&3\\0&1&-2&2\end{bmatrix},$$

所以

$$A_{12}+2A_{34}-A_{41}=-\frac{1}{2}[0+2(-2)-3]=\frac{7}{2}.$$

11. (1) 对分块矩阵$\boldsymbol{B}$做分块倍加行变换将其化为分块上三角矩阵：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{0}\\-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\beta}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\beta}\\\boldsymbol{0}&-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}\end{bmatrix},$$

上式两边取行列式，得

$$|\boldsymbol{B}|=-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{A}|.$$

(2) 显然

$$|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{\beta}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}&k\end{vmatrix}=|\boldsymbol{B}|+k|\boldsymbol{A}|=(k-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta})|\boldsymbol{A}|,$$

由$|\boldsymbol{A}|\neq0$知$|\boldsymbol{C}|\neq0$当且仅当$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}\neq k$，即$\boldsymbol{C}$可逆当且仅当$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}\neq k$.

第 4 章

1. 填空题

(1) -4；(2) $a-b\neq2$；(3) $abc\neq0$；(4) $k\neq-8$；(5) $\frac{\pi}{3}$；

(6) 6；(7) $\frac{1}{2}n(n-1)$；(8) $\begin{bmatrix}3&2&1\\-1&-1&-1\\-1&-1&0\end{bmatrix}$；

(9) 1；(10) $(0,0,0)^{\mathrm{T}}$.

2. 单选题

(1) D；(2) A；(3) D；(4) A；(5) B；(6) B；(7) B；
(8) B；(9) C；(10) A.

3. (1) 线性相关；(2) 线性无关.

4. 令$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3]$，对$\boldsymbol{A}$做初等行变换将其化为阶梯矩阵，得

$$\begin{bmatrix}1&3&-1\\0&-2&1\\5&3&1\\2&-4&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的秩为2，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的一个极大无关组，$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_3$.

5. 因为$|\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3|=-\lambda(\lambda+1)(\lambda-9)$，所以

(1) 当$\lambda=-1$或0或9时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关；

(2) 当$\lambda\neq-1,0,9$时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

6. (1) 充分性. 若$\boldsymbol{K}$可逆，则$[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_m]=[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\beta}_m]\boldsymbol{K}^{-1}$，从而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$等价. 于是由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关可推出$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$也线性无关.

必要性. 令$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_m]$，$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\beta}_m]$. 假设由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关可推出$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性无关，则 rank $\boldsymbol{A}$=rank $\boldsymbol{B}=m$. 由$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AK}$知，rank $\boldsymbol{B}\leqslant$rank $\boldsymbol{K}$，因此 rank $\boldsymbol{K}=m$，故$\boldsymbol{K}$可逆.

(2) 若$\boldsymbol{K}$可逆，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$等价，从而由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性无关可推出$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

(3) 若$m=n$，则$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都是方阵，于是$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{K}|$. 当$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性无关时，有$|\boldsymbol{B}|\neq0$，从而$|\boldsymbol{A}|\neq0$，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

7. (1) $$[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\xi}_1]=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

从而方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\xi}_1$的通解为

$$\boldsymbol{\xi}_2=k_1\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix},\quad k_1\text{ 为任意数.}$$

由

$$[\boldsymbol{A}^2\quad\boldsymbol{\xi}_1]=\begin{bmatrix}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

于是方程组$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\xi}_1$的通解为

$$\boldsymbol{\xi}_3=k_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{bmatrix},\quad k_2,k_3\text{ 为任意数.}$$

(2) 由于

$$|\boldsymbol{\xi}_1\quad\boldsymbol{\xi}_2\quad\boldsymbol{\xi}_3|=\begin{vmatrix}-1&\frac{1}{2}k_1-\frac{1}{2}&-k_2-\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}k_1+\frac{1}{2}&k_2\\-2&k_1&k_3\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq0,$$

因此 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

8. 因 $|\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3|=k^2(k+3)\neq 0$,故 $k\neq 0$ 且 $k\neq -3$.

9. 反证法. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关,故存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

设 $s=\max\{i\,|\,k_i\neq 0,1\leqslant i\leqslant m\}$,则有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}.$$

若 $s>1$,则说明 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表示,这与题设矛盾;若 $s=1$,则得到 $\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$,同样与题设矛盾. 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

10. 充分性. 由于存在 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$,因此

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\leqslant\min\{\operatorname{rank}\boldsymbol{\alpha},\ \operatorname{rank}\boldsymbol{\beta}\}=1.$$

又因 $\boldsymbol{A}$ 是非零矩阵,故 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}\geqslant 1$,即 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=1$.

必要性. 因为 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=1$,所以 $\boldsymbol{A}$ 的任意两行都线性相关,即一行是另一行的倍数,于是

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n),$$

取 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$,则有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$.

11. 记矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]$,$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3]$,对 $[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}]$ 做初等行变换,得

$$[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}]=\begin{bmatrix}0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4\\ 2 & 6 & 10 & 6 & -4 & 16\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4\\ 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

则 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}]$,从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 等价.

12. 记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]$,$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3]$,对 $[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}]$ 做初等行变换,得

$$[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 3 & a+2 & a+3 & a+6 & a+2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & a+1 & a-1 & a+1 & a-4\end{bmatrix}.$$

当 $a\neq -1$ 时,$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B}]=3$,且 $|\boldsymbol{B}|=a+12$.

(1) 当 $a\neq -1$ 且 $a\neq -12$ 时,$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=3$,向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价;

当 $a=-12$ 时,$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=3$,$\operatorname{rank}\boldsymbol{B}<3$,向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)不等价;

当 $a=-1$ 时,$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2$,$\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=3$,向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)不等价.

因此,当 $a\neq -1$ 且 $a\neq -12$ 时,向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价;当 $a=-1$ 或 $a=-12$ 时,向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)不等价.

(2) 因为当 $a=-12$ 时,$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=3$,$\operatorname{rank}\boldsymbol{B}<3$,向量组(Ⅰ)不能被向量组(Ⅱ)线性表示;

当 $a=-1$ 时,$\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=3$,即知方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_i\,(i=1,2,3)$ 有唯一解,向量组(Ⅰ)能被向量组(Ⅱ)线性表示,但向量组(Ⅱ)不能被向量组(Ⅰ)线性表示.

13. $\boldsymbol{\beta}$能否被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示,等价于方程组$[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$是否有解. 对增广矩阵做初等行变换:

$$[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}]=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 3b & 1 & 9 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 3 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 4-3a \end{bmatrix},$$

(1) 当$b=0$时,$\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3]=2$,$\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}]=3$,故方程组无解,从而$\boldsymbol{\beta}$不能被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示;

当$b\neq0$时,对增广矩阵进一步做初等变换化为最简阶梯矩阵:

$$[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}]\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{3}{b} \\ 0 & 0 & 1-a & \dfrac{4b-3}{b} \end{bmatrix},$$

若$a=1$且$b\neq\frac{3}{4}$,则$\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3]=2$,$\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}]=3$,故方程组无解,从而$\boldsymbol{\beta}$不能被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

(2) 当$b\neq0$且$a\neq1$时,$\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3]=\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}]=3$,方程组有唯一解

$$x_1=\frac{3-4b}{b(1-a)},\quad x_2=\frac{3}{b},\quad x_3=\frac{4b-3}{b(1-a)},$$

从而向量$\boldsymbol{\beta}$能被向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$唯一线性表示为

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{3-4b}{b(1-a)}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{3}{b}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{4b-3}{b(1-a)}\boldsymbol{\alpha}_3.$$

(3) 当$a=1$且$b=\frac{3}{4}$时,$\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3]=\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}]=2$,方程组有无穷多解. 对增广矩阵做初等变换,得

$$[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}]\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

方程组的通解为$\boldsymbol{x}=(0,4,0)^{\mathrm{T}}+k(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$,$k$为任意数. 向量$\boldsymbol{\beta}$能被向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$表示为

$$\boldsymbol{\beta}=(-k)\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3,\quad k\text{ 为任意数}.$$

14. 将$\boldsymbol{x}=(2,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$代入方程组,得$a=b$. 将增广矩阵做初等行变换,得

$$[\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix} 1 & a & a & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2+a & 4+a & 4 & 4 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & a-1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(1) 当$a=1$时,增广矩阵可经初等行变换化为

$$[\boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{b}]\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

求得原方程组的通解$\boldsymbol{x}=(1,0,1,-1)^{\mathrm{T}}+k(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$,$k$为任意数.

当 $a\neq1$ 时，增广矩阵可化为

$$[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]\to\begin{bmatrix}1&2-a&0&0&a\\0&a-1&0&1&-a\\0&0&1&0&1\end{bmatrix},$$

得到原方程组的通解 $\boldsymbol{x}=(a,0,1,-a)^{\mathrm{T}}+k\,(a-2,1,0,1-a)^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意数.

(2) 若要求满足条件 $x_2=x_3$，则当 $a=1$ 时，由解的表达式知 $k=1$，即满足条件的解为 $\boldsymbol{x}=(0,1,1,-1)^{\mathrm{T}}$；当 $a\neq1$ 时，由解的表达式知 $k=1$，即满足条件的解为 $\boldsymbol{x}=(2a-2,1,1,1-2a)^{\mathrm{T}}$.

15. 将方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)合并为方程组(Ⅲ)：

$$\begin{cases}x_1+x_2+3x_3=0,\\x_1+3x_2+ax_3=0,\\3x_1+9x_2+a^2x_3=0,\\x_1+3x_2+3x_3=a^2-9,\end{cases}$$

则(Ⅲ)的解即为要求的公共解. 对(Ⅲ)的增广矩阵做初等行变换，得

$$[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}1&1&3&0\\1&3&a&0\\3&9&a^2&0\\1&3&3&a^2-9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&3&0\\0&2&a-3&0\\0&0&3-a&a^2-9\\0&0&a(a-3)&0\end{bmatrix}.$$

当 $a\neq0$，$a\neq-3$ 且 $a\neq3$ 时，$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=3$，$\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]=4$，方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)无公共解.

当 $a=0$ 时，有

$$[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]\to\begin{bmatrix}1&1&3&0\\0&2&-3&0\\0&0&3&-9\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{27}{2}\\0&1&0&-\frac{9}{2}\\0&0&1&-3\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有唯一公共解 $\boldsymbol{x}=\left(\frac{27}{2},-\frac{9}{2},-3\right)^{\mathrm{T}}$.

当 $a=-3$ 时，$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]=3$，方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有公共解，为零解. 当 $a=3$ 时，有

$$[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b}]\to\begin{bmatrix}1&1&3&0\\0&2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的公共解为 $\boldsymbol{x}=k\,(-3,0,1)^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意数.

16. (1) 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关，从而由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 无关，知 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_n]=n-1$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 表出. 已知 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 等价，于是 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{\beta}]=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n-1$，故方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解.

（2）因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$线性相关，所以存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\mathbf{0},$$

即

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+0\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0},$$

亦即

$$\boldsymbol{A}(k_1,k_2,\cdots,k_{n-1},0)^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}.$$

由 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=n-1$，知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系只含一个解向量$(k_1,\cdots,k_{n-1},0)^{\mathrm{T}}$；而 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n$，即$(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的特解，故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=c(k_1,k_2,\cdots,k_{n-1},0)^{\mathrm{T}}+(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}},\quad c\text{ 为任意数}.$$

第 5 章

1. 填空题

（1）3；（2）$\frac{1}{2}$；（3）$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$；（4）1；（5）$-4$；

（6）$(-2,4,-4)^{\mathrm{T}}$；（7）1；（8）2；（9）2；（10）4.

2. 单选题

（1）C；（2）B；（3）D；（4）D；（5）A；（6）B；

（7）A；（8）D；（9）B；（10）B.

3. （1）$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6$；$\boldsymbol{p}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}_3=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{A}$ 可对角化；$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{p}_1\quad \boldsymbol{p}_2\quad \boldsymbol{p}_3]$，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\operatorname{diag}(2,2,6)$.

（2）$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$；$\boldsymbol{p}=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{B}$ 不可对角化.

4. $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=-3$，$|\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{E}|=384$.

5. 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，由 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E}=\mathbf{0}$ 知，$\lambda^2-\lambda-6=0$，从而 $\lambda=3$ 或 -2. 而$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^2=144$，故$|\boldsymbol{A}|=\pm12$，因此 $\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=-2$.

6. 由 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}<0$ 不难知道 $\boldsymbol{A}$ 有两个相异的特征值，故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

7. 由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$ 知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$. 又由 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，知 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$. 而

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & x+y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

于是得 $x+y=0$.

8. 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，有$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，可得 $a=b$. 再由$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$，可得 $a=b=0$. 显然 0，1，2 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，求得对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{p}_1=(-1,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{p}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{p}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

将其单位化得

$$\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{q}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{q}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{q}_1\quad \boldsymbol{q}_2\quad \boldsymbol{q}_3]$，则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，且 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$.

9. (1) 由题意知,$\boldsymbol{\alpha}_1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的特征向量,$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的特征向量. 因 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵,故$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=0$.

(2) 由于 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值的个数为 2,因此 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2$,从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只含一个向量. 又因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$,所以方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_2$ 的通解为$k\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,其中 k 为任意数.

10. (1) 假若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,则由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,知$\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示,设$\boldsymbol{\alpha}_3=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2$,其中 l_1,l_2 不全为零(若 l_1,l_2 同时为 0,则$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$,故由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 得$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$,与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关相矛盾). 于是

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{A}(l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2)=-l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

即$-l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2$,整理得 $2l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$,则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关,矛盾,因此$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(2) 记 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]$,则 $\boldsymbol{P}$ 可逆,且

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},\quad 即\quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

11. (1) 由$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 知,$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 或 3. 又 $\boldsymbol{A}$ 为三阶实对称矩阵,且秩为 1,故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,0,3.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 0 的特征向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,则$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$,即

$$x_1+x_2-x_3=0,$$

取其基础解系

$$\boldsymbol{\beta}=(0,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\gamma}=(-2,1,-1)^{\mathrm{T}},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 0 的特征向量为 $k_1\boldsymbol{\beta}+k_2\boldsymbol{\gamma}$($k_1,k_2$ 不同时为零).

(3) 令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}\quad\boldsymbol{\beta}\quad\boldsymbol{\gamma}]$,则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\-1&-1&1\end{bmatrix}.$$

12. 令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]$,则

$$\boldsymbol{A}^n=\left(\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\right)^n=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&&\\&2^n&\\&&3^n\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1+2^{n+2}+4\cdot3^n&2-2^{n+2}+2\cdot3^n&2+2^{n+1}-4\cdot3^n\\2-2^{n+2}+2\cdot3^n&4+2^{n+2}+3^n&4-2^{n+1}-2\cdot3^n\\2+2^{n+2}-4\cdot3^n&4-2^{n+2}-2\cdot3^n&4+2^n+4\cdot3^n\end{bmatrix}.$$

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 1 的特征向量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$,则$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$,即

$$x_2+x_3=0,$$

取其基础解系$\boldsymbol{p}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{p}_2=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$. 令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{p}_1\quad\boldsymbol{p}_2\quad\boldsymbol{p}]$,则

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}^n\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n&-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n\\0&-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n&\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n\end{bmatrix}.$$

14. 因为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4, \\ \boldsymbol{A\beta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3+\lambda_4\boldsymbol{\alpha}_4, \\ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}=\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^2\boldsymbol{\alpha}_3+\lambda_4^2\boldsymbol{\alpha}_4, \\ \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}=\lambda_1^3\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2^3\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^3\boldsymbol{\alpha}_3+\lambda_4^3\boldsymbol{\alpha}_4, \end{cases}$$

所以

$$[\boldsymbol{\beta}\quad \boldsymbol{A\beta}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}\quad \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_4]\begin{bmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2&\lambda_1^3\\1&\lambda_2&\lambda_2^2&\lambda_2^3\\1&\lambda_3&\lambda_3^2&\lambda_3^3\\1&\lambda_4&\lambda_4^2&\lambda_4^3\end{bmatrix}.$$

由题设知上式最后那个矩阵可逆,于是

$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{\beta}\quad \boldsymbol{A\beta}\quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta}\quad \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}]=\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1\quad \boldsymbol{\alpha}_2\quad \boldsymbol{\alpha}_3\quad \boldsymbol{\alpha}_4]=4,$$

故 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

15. 设 λ 为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的任一特征值,则存在 $\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}$,使 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}$,从而

$$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}.$$

由 $\boldsymbol{A}$ 可逆,知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}$,因此 $\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}>0$.

由 $\boldsymbol{B}$ 是反对称阵,知 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{B}$,从而 $\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{p})^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{p}$,即 $\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{p}=0$.

于是有 $\lambda\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}>0$,即 $\lambda>0$,所以 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|>0$.

第 6 章

1. 填空题

(1) 3.5; (2) $|t|<1$; (3) -2; (4) 3; (5) $-1<a<2$;

(6) 2; (7) $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$; (8) $k>4$; (9) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$; (10) 2,2.

2. 单选题

(1) C; (2) B; (3) A; (4) D; (5) A; (6) C;

(7) B; (8) D; (9) C; (10) A.

3. $\boldsymbol{A}=-\dfrac{1}{n^2}\begin{bmatrix}1-n&1&\cdots&1\\1&1-n&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1-n\end{bmatrix}$.

4. 将括号展开,合并同类项,并配方得

$$\begin{aligned}f&=6(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3)\\&=6\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{9}{2}(x_2-x_3)^2,\end{aligned}$$

令

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\quad 即\quad \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix},$$

则在此可逆线性变换下 f 的标准形为 $f=6y_1^2+\frac{9}{2}y_2^2$.

5. (1) 二次型可写成

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-6x_1x_2+2x_1x_3,$$

对二次型的矩阵做初等行变换化为阶梯矩阵,得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-3&1\\-3&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-3&1\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix},$$

则 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=3$,即二次型的秩为 3.

(2) 由配方法得

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-3x_2+x_3)^2-7\left(x_2-\frac{3}{7}x_3\right)^2+\frac{9}{7}x_3^2,$$

令 $y_1=x_1-3x_2+x_3, y_2=x_2-\frac{3}{7}x_3, y_3=x_3$,即

$$x_1=y_1+3y_2+\frac{2}{7}y_3,\quad x_2=y_2+\frac{3}{7}y_3,\quad x_3=y_3,$$

再令 $y_1=z_1, y_2=\frac{1}{\sqrt{7}}z_2, y_3=\frac{\sqrt{7}}{3}z_3$,即

$$x_1=z_1+\frac{3}{\sqrt{7}}z_2+\frac{2}{3\sqrt{7}}z_3,\quad x_2=\frac{1}{\sqrt{7}}z_2+\frac{1}{\sqrt{7}}z_3,\quad x_3=\frac{\sqrt{7}}{3}z_3,$$

故二次型的规范形为 $f=z_1^2-z_2^2+z_3^2$,所用的非退化线性变换为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$,其中

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&\frac{3}{\sqrt{7}}&\frac{2}{3\sqrt{7}}\\0&\frac{1}{\sqrt{7}}&\frac{1}{\sqrt{7}}\\0&0&\frac{\sqrt{7}}{3}\end{bmatrix}.$$

6. 因为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-5)$,所以 $\boldsymbol{B}$ 的三个特征值为 1,2,5,从而 $\boldsymbol{B}$ 的正惯性指数为 3,负惯性指数为 0. 由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同知二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形为 $z_1^2+z_2^2+z_3^2$.

7. 二次型及其标准形的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&a&-2\\a&4&4\\-2&4&-3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&&\\&6&\\&&b\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,因此由 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=\operatorname{tr}\boldsymbol{B}$ 得 $b=-6$. 再由 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$ 可得 $a=2$ 或 $a=\frac{10}{3}$,经验证 $a=\frac{10}{3}$ 不符合题意.

8. 二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&2&\frac{a}{2}\\2&4&-2\\\frac{a}{2}&-2&4\end{bmatrix},$$

由 rank $\boldsymbol{A}=2$ 知$|\boldsymbol{A}|=0$,从而得 $a=4$.容易算得$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda-6)^2$,故 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $6,6,0$,于是二次型的规范形为 $z_1^2+z_2^2$.

9.(1)由于$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-4)$,因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=4,\lambda_2=1,\lambda_3=-2$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵,所以存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}(4,1,-2)\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$.记 $\boldsymbol{D}=\operatorname{diag}(4,1,-2)$,则

$$\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2=(k\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^2=[\boldsymbol{Q}(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}]^2=\boldsymbol{Q}(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D})^2\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}.$$

于是取对角矩阵

$$\boldsymbol{\Lambda}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D})^2=\operatorname{diag}((k+4)^2,(k+1)^2,(k-2)^2),$$

则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{-1}$,即 $\boldsymbol{B}$ 与$\boldsymbol{\Lambda}$ 相似.

(2)由(1)知 $\boldsymbol{B}=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^2$ 的特征值为$(k+4)^2,(k+1)^2,(k-2)^2$.若要使 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵,$\boldsymbol{B}$ 的全部特征值必须全为正数,即

$$\begin{cases}(k+4)^2>0,\\(k+1)^2>0,\\(k-2)^2>0,\end{cases}$$

亦即 $k\neq-4,k\neq-1,k\neq2$,于是当 $k\neq-4,-1,2$ 时,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵.

10.因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵,所以 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于零,从而$\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^*$,$\boldsymbol{A}^{-1}$都是实对称矩阵,且它们的特征值全大于零,于是$\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{A}^{-1}$都是正定矩阵,$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}^{-1}$为实对称矩阵.

对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}>0,$$

即$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}^{-1}$的正定矩阵.

11.由 $\boldsymbol{A}$ 正定知 $\boldsymbol{A}^{-1}$正定,即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$,因此

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|&=|\boldsymbol{A}||\lambda\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}|\\&=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}||\lambda\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{P}|\\&=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{P}||\lambda\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}|\\&=|\lambda\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}|,\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 是半正定的,因此$(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$是半正定的,于是$|\lambda\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}|=0$ 的根即$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=0$ 的根是非负实数,即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 的特征值是非负的实数.

12.因为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$,所以 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵.

对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,有$\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle>0,\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\rangle\geqslant0$,因此

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle+\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\rangle>0,$$

于是 $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

13.假设存在 m 个常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{x}_m=\boldsymbol{0}$,则

$$k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_m=\boldsymbol{0},$$

两边左乘以$\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}$,并利用条件$\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_j=0(i\neq j)$,得 $k_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=0(i=1,2,\cdots,m)$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵,所以对任意的 n 维非零列向量$\boldsymbol{x}_i$,有$\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i>0$,从而$k_i=0(i=1,2,\cdots,m)$,即$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性无关.

14. (1) 由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵知 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是实对称矩阵,因此

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\end{bmatrix}.$$

(2) 因为 $\boldsymbol{D}\simeq\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$ 且 $\boldsymbol{D}$ 正定,所以 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$ 正定,即 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}C\end{bmatrix}$ 正定,从而它的特征值都是正数.又由(1)得

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}|=|\lambda\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{A}|\,|\lambda\boldsymbol{E}_n-(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C})|,$$

即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 的特征值都是 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$ 的特征值,因此 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 的特征值都是正数.显然 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 是实对称矩阵,故 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 是正定矩阵.

15. 记

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix},$$

则

$$f(x,y,z)=\frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|^2},\quad \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0},$$

不难求得 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值 $-2,1,4$,且最大特征值 4 对应的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$,最小特征值 -2 对应的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$,因此由第 6 章范例精讲中例 15 及其注解可知

$$f_{\max}=f(2,-2,1)=4,\quad f_{\min}=f(1,2,2)=-2.$$

单元测验参考解答

第 2 章

一、填空题(每小题 3 分,共 18 分)

1. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; 2. $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{2}\boldsymbol{B} \\ (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$; 3. $4^{98}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$;

4. $\begin{bmatrix} 11 & 1 & 1 \\ 22 & 2 & 2 \\ 165 & 15 & 15 \end{bmatrix}$; 5. 2; 6. $\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})$.

二、单选题(每小题 3 分,共 18 分)

1. C; 2. D; 3. B; 4. A; 5. D; 6. B.

三、(10 分) 由

$$\boldsymbol{A} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & \lambda \\ 0 & -1-2\lambda & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 9-3\lambda & \lambda-3 & 0 \end{bmatrix}$$

得

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \begin{cases} 2, & \lambda = 3, \\ 3, & \lambda \neq 3. \end{cases}$$

四、(10 分) $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & -3 \\ -7 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

五、(10 分) 将 $\boldsymbol{A}$ 分块为$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix}$,则$\boldsymbol{A}^k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{C}^k \end{bmatrix}$.

注意到$\boldsymbol{B}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}^2 = 5^2\boldsymbol{E}_2$,因此

$$B^k=\begin{bmatrix}3 & 4\\4 & -3\end{bmatrix}^k=\begin{cases}5^k E_2, & k=2m,\\ 5^{k-1}\begin{bmatrix}3 & 4\\4 & -3\end{bmatrix}, & k=2m+1.\end{cases}$$

又

$$C^k=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}^k=\begin{cases}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2^k\end{bmatrix}, & k=2m,\\ \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 2^k\end{bmatrix}, & m=2m+1,\end{cases}$$

从而

$$A^k=\begin{cases}\begin{bmatrix}5^k & 0 & 0 & 0\\0 & 5^k & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 2^k\end{bmatrix}, & k=2m,\\ \begin{bmatrix}3\cdot 5^{k-1} & 4\cdot 5^{k-1} & 0 & 0\\4\cdot 5^{k-1} & -3\cdot 5^{k-1} & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 2^k\end{bmatrix}, & k=2m+1.\end{cases}$$

六、(10 分)　因 $A-B^{-1}=(AB-E)B^{-1}$,且 $AB-E,B^{-1}$ 可逆,故 $A-B^{-1}$ 可逆. 又 $(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}=(A-B^{-1})^{-1}[E-(A-B^{-1})A^{-1}]=(A-B^{-1})^{-1}(AB)^{-1}$,而 $(A-B^{-1})^{-1}$, $(AB)^{-1}$ 可逆,因此 $(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$ 可逆.

七、(12 分)　由 A 可逆,$ABA=-2E+AB$ 可知 $BA=-2A^{-1}+B$,即

$$B(E-A)=2A^{-1},$$

故 $B=2[(E-A)A]^{-1}$,容易求得

$$B=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -2 & -2\\-1 & 2 & 0\\-1 & 2 & 6\end{bmatrix}.$$

八、(12 分)　设该方程组的系数矩阵为 A,增广矩阵为 $\widetilde{A}$,则

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & k & 4\\0 & k+1 & k+1 & k^2+4\\2 & 0 & k+2 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & k & 4\\0 & 1 & \frac{1}{2}k-1 & 4\\0 & 0 & -\frac{1}{2}(k+1)(k-4) & k(k-4)\end{bmatrix}.$$

当 $k\neq 4,-1$ 时,$\operatorname{rank} A=\operatorname{rank}\widetilde{A}=3$,方程组有唯一解;

当 $k=-1$ 时,$\operatorname{rank} A=2$,$\operatorname{rank}\widetilde{A}=3$,方程组无解;

当 $k=4$ 时,方程组的增广矩阵可化为

$$\widetilde{A}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 0\\0 & 1 & 1 & 4\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

则原方程组的通解为

$$x = k\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix},\quad k \text{ 为任意数.}$$

第 3 章

一、填空题(每小题 3 分,共 18 分)

1. $\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}$; 2. -28; 3. 1; 4. -6^{n-1}; 5. 3; 6. a^{n^2-n+1}.

二、单选题(每小题 3 分,共 18 分)

1. B; 2. D; 3. C; 4. D; 5. B; 6. B.

三、(10 分) $D_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\\ -2 & -2 & -2 & \cdots & -2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 0 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\\ 2 & -2 & -2 & \cdots & -2\end{vmatrix}$

$$=-2\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}+2(-1)^n\begin{vmatrix}x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}$$

$$=-2\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)+2(-1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

四、(10 分) 容易算得

$$D=A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=0,\quad A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}=0,$$
$$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}=0,\quad A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=0,$$

所以 D 中各元的代数余子式之和 0.

五、(10 分) 由已知得 $|\boldsymbol{A}|=8$,且 $(\boldsymbol{A}^*-8\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=8\boldsymbol{E}-8\boldsymbol{A}$,即

$$(8\boldsymbol{A}^{-1}-8\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=8\boldsymbol{E}-8\boldsymbol{A},$$

从而

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1},$$

化简得

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A},$$

由于 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,因此 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}$,所以

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

六、(10 分) 因为

$$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2|=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^2|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A})|$$

$$=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{T}-\boldsymbol{A}|=(-1)^{2n+1}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{T}|$$
$$=-|\boldsymbol{A}||(\boldsymbol{A}^{T}-\boldsymbol{A})^{T}|=-|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{T}-\boldsymbol{A}|$$
$$=-|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{T}-\boldsymbol{A}^{2}|=-|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{2}|,$$

所以$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2|=0$.

七、(12 分) 因为$|\boldsymbol{A}|=1$,所以方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有唯一解$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

由$a_{ij}=A_{ij}$知$\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}^*$,从而$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^*$,因此

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{31}\\a_{32}\\a_{33}\end{bmatrix}.$$

又

$$|\boldsymbol{A}|=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}=a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2,$$

由$|\boldsymbol{A}|=1,a_{33}=-1$知,$a_{31}^2+a_{32}^2=0$,从而$a_{31}=a_{32}=0$,方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解为$\boldsymbol{x}=(0,0,-1)^T$.

八、(12 分) 由

$$|\boldsymbol{M}|=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

知$|\boldsymbol{M}|\neq0$等价于$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\neq0$,即$|\boldsymbol{A}|\neq0$且$|\boldsymbol{B}|\neq0$. 故$\boldsymbol{M}$可逆的充要条件是$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均可逆.

当$\boldsymbol{M}$可逆时,由分块初等行变换得

$$\left[\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{A}&\boldsymbol{E}_n&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{E}_n\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{E}&\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{0}\\-\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}&-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{E}\end{array}\right]$$
$$\to\left[\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{E}&\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}&\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{E}\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{E}&\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{E}&\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{array}\right]$$
$$\to\left[\begin{array}{cc:cc}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}&-\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{E}&\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{array}\right],$$

所以

$$\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}&-\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}.$$

第 4 章

一、填空题(每小题 3 分,共 18 分)

1. $\frac{1}{2}$; 2. 3; 3. $pst=1$; 4. $(1,1,2)^T$; 5. $k(1,1,\cdots,1)^T$,k为任意数;

6. $k(6,7,-26)^T+(3,3,-10)^T$,k为任意数.

二、单选题(每小题 3 分,共 18 分)

1. D; 2. B; 3. C; 4. A; 5. B; 6. A.

三、(10 分) 设向量$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$满足$\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{x}=0$,即

$$x_1+3x_2+2x_3+x_4=0,$$

得方程组的基础解系为$\boldsymbol{\beta}_1=(-3,1,0,0)^T$,$\boldsymbol{\beta}_2=(-2,0,1,0)^T$,$\boldsymbol{\beta}_3=(-1,0,0,1)^T$. 用 Schmidt 正交化方法,得到

$$\boldsymbol{\gamma}_1=(-3,1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{5}(-1,-3,5,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{14}(-1,-3,-2,14)^{\mathrm{T}},$$

取$\boldsymbol{\alpha}_2=(-3,1,0,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-3,5,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,-3,-2,14)^{\mathrm{T}}$,则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为正交向量组.

四、(10 分) (1) 对矩阵$[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2]$做初等行变换,化为阶梯矩阵:

$$\begin{bmatrix}1&1&1&-1&1\\0&1&2&2&0\\1&2&a&1&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&-1&1\\0&1&2&2&0\\0&0&a-3&0&b-1\end{bmatrix},$$

当 $a=3,b\neq1$ 时,向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(2) 当 $a\neq3$ 时,矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解:

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}-3&1+\dfrac{b-1}{a-3}\\2&-\dfrac{2(b-1)}{a-3}\\0&\dfrac{b-1}{a-3}\end{bmatrix};$$

当 $a=3,b=1$ 时,对增广矩阵做初等行变换:

$$\begin{bmatrix}1&1&1&-1&1\\0&1&2&2&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-3&1\\0&1&2&2&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解:

$$\boldsymbol{X}=k\begin{bmatrix}1&0\\-2&0\\1&0\end{bmatrix}+l\begin{bmatrix}0&1\\0&-2\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3&1\\2&0\\0&0\end{bmatrix},\quad k,l\text{ 为任意数.}$$

五、(10 分) 见第 2 章范例精讲中例 23 的解答.

六、(10 分) 设有一组数 $k,k_1,k_2,\cdots,k_s$,使得 $k\boldsymbol{\beta}+\sum\limits_{i=1}^{s}k_i(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{0}$,即

$$\left(k+\sum_{i=1}^{s}k_i\right)\boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^{s}(-k_i)\boldsymbol{\alpha}_i,$$

两边左乘 $\boldsymbol{A}$,得

$$\left(k+\sum_{i=1}^{s}k_i\right)\boldsymbol{A\beta}=\sum_{i=1}^{s}(-k_i)\boldsymbol{A\alpha}_i=\boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{A\beta}\neq\boldsymbol{0}$,所以 $k+\sum\limits_{i=1}^{s}k_i=0$,从而 $\sum\limits_{i=1}^{s}(-k_i)\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{0}$,即 $\sum\limits_{i=1}^{s}k_i\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{0}$. 由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,可知$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关,于是 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$,从而 $k=0$,因此$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

七、(12 分) 设所求的线性方程组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,则

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}14\\-20\\1\\3\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}12\\-20\\2\\5\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}14\\-20\\3\\1\\2\end{bmatrix}$$

是导出方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，即 $\boldsymbol{A\alpha}_i=\boldsymbol{0}(i=1,2,3)$，故

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{A\alpha}_1\quad\boldsymbol{A\alpha}_2\quad\boldsymbol{A\alpha}_3]=\boldsymbol{0},$$

令 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]$，则 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$，因此$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的列向量是齐次方程组$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 的解向量. 由于 rank $\boldsymbol{A}=5-3=2$，因此可设 $\boldsymbol{A}$ 只有两行，且这两个行向量线性无关，所以$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的两个列向量是$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 的线性无关的解.

将矩阵$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 做初等行变换，化为最简阶梯矩阵，得

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}14&-20&1&3&2\\12&-20&2&5&1\\14&-20&3&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&&&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\&1&&-\frac{5}{4}&\frac{1}{4}\\&&1&-1&0\end{bmatrix},$$

从而可得$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为$(6,5,4,4,0)^{\mathrm{T}}$，$(-2,-1,0,0,4)^{\mathrm{T}}$，于是

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}6&5&4&4&0\\-2&-1&0&0&4\end{bmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{x}_0=(-16,23,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，所以 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=(19,9)^{\mathrm{T}}$，从而所求的线性方程组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$.

八、(12 分)　(1) 设存在数 k_1,k_2，使得 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)=\boldsymbol{0}$，则

$$\boldsymbol{A}[k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)]=\boldsymbol{0},\quad 即\quad k_1\boldsymbol{A\eta}_1+k_2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)=\boldsymbol{0},$$

从而 $k_1\boldsymbol{b}+k_2\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$，得 $k_1=0$，因此 $k_2(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)=0$，由$\boldsymbol{\eta}_1\neq\boldsymbol{\eta}_2$，知 $k_2=0$，故向量组$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$线性无关.

(2) 若 rank $\boldsymbol{A}=n-1$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间是一维的，向量组$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$线性相关，即存在不全为零的数 k_1,k_2，使得

$$k_1\boldsymbol{\xi}+k_2(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)=\boldsymbol{0},$$

即 $k_1\boldsymbol{\xi}+k_2\boldsymbol{\eta}_1-k_2\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{0}$，从而向量组$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$线性相关.

第 6 章

一、填空题(每小题 3 分，共 18 分)

1. 1；　2. 14；　3. 1；　4. 12；　5. $\boldsymbol{E}$；　6. $a_1a_2\cdots a_n\neq(-1)^n$.

二、单选题(每小题 3 分，共 18 分)

1. A；　2. C；　3. D；　4. B；　5. B；　6. C.

三、(10 分)　设$\boldsymbol{\alpha}$ 是$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值 λ 对应的特征向量，则$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，从而$\boldsymbol{A\alpha}=\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}\boldsymbol{\alpha}$，即

$$\begin{bmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}=-\frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix},$$

亦即

$$\begin{cases}\lambda(-a+1+c)=1,\\ \lambda(-5-b+3)=1,\\ \lambda(c-1-a)=-1,\end{cases}$$

解得 $a=c,\lambda=1,b=-3$. 由题设知 $|\boldsymbol{A}|=a-3=-1$, 故 $a=2$. 从而 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 所对应的特征值为 1.

四、(10 分) 由 $|\boldsymbol{B}^{-1}|=\frac{1}{3}$, 知 $|\boldsymbol{B}|=3$, 而 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 故 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的第三个特征值为 $\lambda_3=-3$, 从而 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $-4,-2,-6$, 即知 $|-(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})^{-1}|=\frac{1}{48}$, 且

$$\boldsymbol{B}^*+\left(-\frac{1}{4}\boldsymbol{B}\right)^{-1}=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}-4\boldsymbol{B}^{-1}=-\boldsymbol{B}^{-1},$$

因此

$$\begin{vmatrix}-(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})^{-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^*+\left(-\frac{1}{4}\boldsymbol{B}\right)^{-1}\end{vmatrix}=|-(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})^{-1}||-\boldsymbol{B}^{-1}|=-\frac{1}{144}.$$

五、(10 分) 由题意知 $\boldsymbol{\beta}_0=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 3 的特征向量, 记 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3]$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{0}(i=1,2,3)$, $\boldsymbol{\beta}_3=2\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$, 且 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关, 从而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 0 的线性无关的特征向量, 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 正交化, 再将 $\boldsymbol{\beta}_0,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 单位化, 得

$$\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{q}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{q}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^{\mathrm{T}},$$

令 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{q}_1\ \ \boldsymbol{q}_2\ \ \boldsymbol{q}_3]$, 做正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, 将二次型化为标准形 $f=3y_1^2$.

六、(12 分) (1) 因为方程组有无穷多解, 所以系数行列式 $(a-1)^2=0$, 得 $a=1$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-1$ 的特征向量分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3]$, 则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&-2&\\&&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&0\\ \frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\\ 0&0&-1\end{bmatrix}.$$

(2) 因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2,\lambda_3=-1$, 所以 $|\boldsymbol{A}|=2$, 从而 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $2,-1,-2$, 于是 $\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $4,1,0$, 故 $|\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}|=\boldsymbol{0}$.

七、(12 分) (1) 设有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0},$$

两边左乘 $\boldsymbol{A}$, 且利用题设条件, 得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0},$$

继续同样的方法,得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_3+k_2\boldsymbol{\alpha}_4+\cdots+k_{n-2}\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0},$$
$$\vdots$$
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+k_2\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0},$$

再左乘 $\boldsymbol{A}$,得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0},$$

由$\boldsymbol{\alpha}_n\neq\mathbf{0}$,知 $k_1=0$,从而 $k_2=0,\cdots,k_n=0$. 即$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

(2) 由题设条件得

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_n]=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix},$$

记上式最后那个矩阵为 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_n]$,则由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,知 $\boldsymbol{P}$ 可逆,从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$,故

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=0,$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$,对应的特征向量为 $k\boldsymbol{\alpha}_n$,其中 k 为任意非零数.

八、(10 分) 必要性. 取 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$,则由 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵可知

$$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E},$$

当然 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

充分性. 假若 $\boldsymbol{A}$ 不是可逆矩阵,则存在 $\boldsymbol{x}_0\neq\mathbf{0}$,使得 $\boldsymbol{Ax}_0=\mathbf{0}$. 从而由 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵、$\boldsymbol{B}$ 是实矩阵,可知

$$\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_0=(\boldsymbol{Ax}_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}_0+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax}_0)=0,$$

这与 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵矛盾,故 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

期末考试参考解答

期末考试题(一)

一、填空题(每小题 3 分,共 18 分)

1. 0； 2. $\begin{bmatrix} 0 & 8 & -4 \\ 0 & -20 & 12 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$； 3. 40； 4. $(1,0,0)^T$；

5. $<\frac{1}{n}$； 6. $\frac{1}{2}n(n-1)$.

二、单选题(每小题 3 分,共 18 分)

1. A； 2. D； 3. B； 4. C； 5. B； 6. C.

三、(10 分)

$$|\boldsymbol{A}| \xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{r_i - r_{i+1}} \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=n,n-1,\cdots,3,2]{c_i - c_{i-1}} \begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & x \\ x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x) \begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{n+1}x\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=(1-x)^n+(-1)^{n+1}x^n.$$

四、(10 分) 由 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$ 得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,从而

$$(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}, \quad 即 \quad \boldsymbol{X}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})^{-1}.$$

而 $|\boldsymbol{A}|=4$,故

$$\boldsymbol{X}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

五、(10 分) 因为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$ 是方程组(Ⅰ)的通解,$l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2$ 是方程组(Ⅱ)的通解,所以求方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)的公共解即是令

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2,$$

得

$$\begin{cases} k_1+3k_2+2k_3-l_1-l_2=0, \\ 2k_1-k_2+3k_3-4l_1+3l_2=0, \\ 5k_1+k_2+4k_3-7l_1+4l_2=0, \\ 7k_1+7k_2+20k_3-l_1-2l_2=0, \end{cases}$$

对该方程组的系数矩阵做初等行变换化为最简阶梯矩阵:

$$[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ -\boldsymbol{\beta}_1\ \ -\boldsymbol{\beta}_2]=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & -7 & 4 \\ 7 & 7 & 20 & -1 & -2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

得到通解

$$k_1=-\frac{3}{14}t, \quad k_2=\frac{4}{7}t, \quad k_3=0, \quad l_1=\frac{1}{2}t, \quad l_2=t, \quad t\ 为任意数.$$

于是方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)的公共解为

$$\frac{1}{2}t\boldsymbol{\beta}_1+t\boldsymbol{\beta}_2=\frac{t}{2}(3,-2,-1,5)^{\mathrm{T}}, \quad t\ 为任意数.$$

六、(10 分) 参见第 5 章疑难辨析中问题 3 的解答.

七、(12 分) 做初等行变换,得

$$[\boldsymbol{\alpha}_1\ \ \boldsymbol{\alpha}_2\ \ \boldsymbol{\alpha}_3\ \ \boldsymbol{\beta}_1\ \ \boldsymbol{\beta}_2\ \ \boldsymbol{\beta}_3]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & a & a+1 & 2a & -2 \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&2&1&1&-1\\0&1&-1&0&1&2\\0&0&a-1&a-1&2a-5&-6\end{bmatrix}.$$

（1）当 $a\neq1$ 时，$\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]=\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3]=3$，所以，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

由 $a\neq1$ 即知

$$\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\a-1&2a-5&-6\end{vmatrix}=-a+1\neq0,$$

故 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3]=3$，因此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示. 从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 等价.

（2）当 $a=1$ 时，

$$[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\boldsymbol{\beta}_3]\to\begin{bmatrix}1&0&2&1&1&-1\\0&1&-1&0&1&2\\0&0&0&0&-3&-6\end{bmatrix},$$

即 $\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3]<\operatorname{rank}[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\beta}_2]$，故向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

八、(12 分)　二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&4&-2\\4&a&2\\-2&2&6\end{bmatrix},$$

而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $7,7,-2$，所以 $a+a+6=7+7-2=12$，即 $a=3$.

当 $\lambda_1=7$ 时，解方程组 $(7\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,2)^{\mathrm{T}},$$

将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 正交化、单位化得

$$\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad\boldsymbol{q}_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}(-1,1,4)^{\mathrm{T}}.$$

当 $\lambda_2=-2$ 时，解方程组 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_3=(2,-2,1)^{\mathrm{T}},$$

单位化得

$$\boldsymbol{q}_3=\frac{1}{3}(2,-2,1)^{\mathrm{T}}.$$

令

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{q}_1\quad\boldsymbol{q}_2\quad\boldsymbol{q}_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{3\sqrt{2}}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{3\sqrt{2}}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{4}{3\sqrt{2}}&\frac{1}{3}\end{bmatrix},$$

则所用的正交变换为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$.

期末考试题(二)

一、填空题(每小题 3 分,共 18 分)

1. $\sqrt{14}$; 2. 0; 3. $-2<\lambda<1$; 4. $k=1-l$,l 为任意数;

5. $(-1)^{n-1}3$; 6. $\frac{1}{a}$.

二、单选题(每小题 3 分,共 18 分)

1. D; 2. B; 3. C; 4. A; 5. C; 6. D.

三、(10 分) 用升阶法.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 & n+x_n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & (n-1)+x_{n-1} & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 2+x_2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1+x_1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & \cdots & -(n-1) & -n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n} x_i \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{x_i} & -\frac{1}{x_1} & -\frac{2}{x_2} & \cdots & -\frac{n-1}{x_{n-1}} & -\frac{n}{x_n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{x_i}\right)\prod_{i=1}^{n} x_i.$$

四、(10 分) 由 $(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 得

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

五、(10 分) 因为

$$[\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3 \quad \boldsymbol{\alpha}_4 \quad \boldsymbol{\alpha}_5]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 4 & -3\\1 & -1 & 3 & -2 & -1\\2 & 1 & 3 & 5 & -5\\3 & 1 & 5 & 7 & -8\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & -1\\0 & 1 & -1 & 0 & 2\\0 & 0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性相关,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为其一个极大无关组,且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_5=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_4.$$

六、(10 分) $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}1 & -3 & -1 & 0\\1 & -4 & a & b\\2 & -1 & 3 & 5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -3 & -1 & 0\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & a+2 & b+1\end{bmatrix}.$

当 $a\neq-2$ 时,方程组有唯一解;

当 $a=-2,b\neq-1$ 时,方程组无解;

当 $a=-2,b=-1$ 时,$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\widetilde{\boldsymbol{A}}=2<3$,方程组有无穷多组解,其通解为

$$\boldsymbol{\alpha}=(3,1,0)^{\mathrm{T}}+k(-2,-1,1)^{\mathrm{T}},\quad k \text{ 为任意数}.$$

七、(12 分) 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}$,其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=2$,对应的线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{p}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{p}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{p}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}};$$

将它们正交化、单位化得

$$\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{q}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{q}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^{\mathrm{T}},$$

于是正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$,即 $\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1-\dfrac{1}{\sqrt{6}}y_2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_3,\\x_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1-\dfrac{1}{\sqrt{6}}y_2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_3,\\x_3=\dfrac{2}{\sqrt{6}}y_2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_3,\end{cases}$

化二次型为标准形 $f=-y_1^2-y_2^2+2y_3^2$.

八、(12 分) (1) 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$,则$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$. 反之,若$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$,则

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}\|^2=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{0},$$

得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$. 因此齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解,故 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$.

(2) 因为

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})&\leqslant\operatorname{rank}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}]=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{\beta}])\\&\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}),\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{rank}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}]=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$，故方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 有解.

期末考试题(三)

一、填空题(每小题 3 分，共 18 分)

1. -14； 2. $\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1} & -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{-1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}^{-1}\end{bmatrix}$； 3. $\begin{bmatrix}2^n & n2^{n-1} & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3^{n-1} & 2\cdot 3^{n-1}\\ 0 & 0 & -2\cdot 3^{n-1} & 4\cdot 3^{n-1}\end{bmatrix}$；

4. 2； 5. 2； 6. 3.

二、单选题(每小题 3 分，共 18 分)

1. B； 2. A； 3. A； 4. D； 5. C； 6. B.

三、(10 分) 方法 1 先将 D_n 按第一行展开，再按第一列展开得 $D_n=D_{n-1}+D_{n-2}$，$n\geqslant 3$.

下面对 n 用归纳法证明题中等式成立. 因为 $D_1=1,D_2=2$，所以当 $n=1,2$ 时，等式成立. 现在假设对所有小于 n 的正整数等式成立，从而

$$\begin{aligned}D_n&=D_{n-1}+D_{n-2}\\&=\frac{1}{2^n\sqrt{5}}[(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n]+\\&\quad\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{5}}[(1+\sqrt{5})^{n-1}-(1-\sqrt{5})^{n-1}]\\&=\frac{1}{2^n\sqrt{5}}[(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n]+\\&\quad\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}[(1+\sqrt{5})^n(-1+\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})^n(1+\sqrt{5})]\\&=\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}(1+\sqrt{5})^n[2+(-1+\sqrt{5})]-\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}(1-\sqrt{5})^n[2-(1+\sqrt{5})]\\&=\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}[(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}].\end{aligned}$$

方法 2 先将 D_n 按第一行展开，再按第一列展开得 $D_n=D_{n-1}+D_{n-2}$，$n\geqslant 3$.

令数 a,b 满足 $a+b=1,ab=-1$，解得

$$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad b=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

从而

$$D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2},\quad n\geqslant 3.$$

因 $D_1=1,D_2=2$，故递推可得

$$D_n-aD_{n-1}=b^n,\quad D_n-bD_{n-1}=a^n,$$

消去 D_{n-1} 得到

$$D_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

四、(10 分) 因为

$$[\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{E}]=\left[\begin{array}{cccccc:cccccc}1&1&1&\cdots&1&1&1&0&0&\cdots&0&0\\1&0&1&\cdots&1&1&0&1&0&\cdots&0&0\\1&1&0&\cdots&1&1&0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0&1&0&0&0&\cdots&1&0\\1&1&1&\cdots&1&0&0&0&0&\cdots&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccccc:cccccc}1&0&0&\cdots&0&0&2-n&1&1&\cdots&1&1\\0&1&0&\cdots&0&0&1&-1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0&1&0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0&1&0&0&\cdots&-1&0\\0&0&0&\cdots&0&1&1&0&0&\cdots&0&-1\end{array}\right],$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}2-n&1&1&\cdots&1&1\\1&-1&0&\cdots&0&0\\1&0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&0&0&\cdots&-1&0\\1&0&0&\cdots&0&-1\end{bmatrix}.$$

五、(10 分) 对方程组的增广矩阵做初等行变换,得

$$[\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}2&3&1&4\\3&8&-2&13\\4&-1&9&-6\\1&-2&4&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

原方程组等价于

$$\begin{cases}x_1\qquad +2x_3=-1,\\ \qquad x_2-\ x_3=\ \ 2.\end{cases}$$

此方程组一个特解及其导出方程组的基础解系分别为

$$\boldsymbol{\eta}_0=\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix},$$

方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}_0$, k 为任意数.

六、(10 分) 见单元测验参考解答中第 6 章第四题.

七、(12 分) 方法 1 记 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, $g=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&4&-2\\4&9&-5\\-2&-5&3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&-2&-2\\-2&3&4\\-2&4&6\end{bmatrix}.$$

对 $\boldsymbol{A}$ 做初等合同变换,得

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -5 \\ -2 & -5 & 3 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ \hdashline 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

在可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{z}$ 下，$f=2z_1^2+z_2^2$,其中

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

再对 $\boldsymbol{B}$ 做初等合同变换,得

$$\begin{bmatrix} B \\ E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 6 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ \hdashline 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

在可逆线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{z}$ 下 $g=2z_1^2+z_2^2$,其中

$$\boldsymbol{C}_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{y}$ 得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{z}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{y}$. 令

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

在可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下，$f=g=2z_1^2+z_2^2$.

方法 2　由配方法,有

$$\begin{aligned} f&=(2x_1^2+8x_1x_2-4x_1x_3)+9x_2^2+3x_3^2-10x_2x_3, \\ &=2[x_1^2+2x_1(2x_2-x_3)+(2x_2-x_3)^2]-2(2x_2-x_3)^2+9x_2^2+3x_3^2-10x_2x_3 \\ &=2[x_1+2x_2-x_3]^2+x_2^2+x_3^2-2x_2x_3 \\ &=2[x_1+2x_2-x_3]^2+(x_2-x_3)^2, \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} z_1=x_1+2x_2-x_3, \\ z_2=\quad\quad x_2-x_3, \\ z_3=\quad\quad\quad\quad x_3, \end{cases}\quad 即\quad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\quad 或\quad \boldsymbol{z}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x},$$

从而

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix},\quad 或\quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{z}.$$

由配方法,有

$$\begin{aligned}g &= (2y_1^2-4y_1y_2-4y_1y_3)+3y_2^2+6y_3^2+8y_2y_3\\ &= 2[y_1-y_2-y_3]^2+y_2^2+4y_3^2+4y_2y_3\\ &= 2[y_1-y_2-y_3]^2+[y_2+2y_3]^2,\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases}z_1=y_1-y_2-y_3,\\ z_2=\qquad y_2-2y_3,\\ z_3=\qquad\qquad y_3,\end{cases}\quad 即\quad \begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix},\quad 或\quad \boldsymbol{z}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{y},$$

因此可逆线性变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1&-3&-6\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

将二次型 f 化为 g.

八、(12 分) 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$ 有 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$,故

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\leqslant n.$$

另一方面,

$$n=\operatorname{rank}(2\boldsymbol{E})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\leqslant\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}),$$

故 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=n$.

反之,由 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=n$ 可得

$$(n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}))+(n-\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}))=n,$$

即方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 两个解空间的维数之和为 n,故 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个分别属于特征值 1,-1 的线性无关的特征向量,于是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_s&\\&-\boldsymbol{E}_t\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},$$

从而

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_s&\\&-\boldsymbol{E}_t\end{bmatrix}^2\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{A}.$$

期末考试题(四)

一、填空题(每小题 3 分 共 18 分)

1. $\frac{5}{3}$; 2. $\begin{bmatrix}0&0&-1\\2&-1&2\\-1&1&-1\end{bmatrix}$; 3. -10; 4. 8; 5. $-\frac{1}{8}$; 6. 3.

二、单选题(每小题 3 分 共 18 分)

1. C; 2. B; 3. B; 4. A; 5. D; 6. C.

三、(10 分) 用升阶法.

$$D_n=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&1+x_1&1+x_1^2&\cdots&1+x_1^n\\1&1+x_2&1+x_2^2&\cdots&1+x_2^n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1+x_n&1+x_n^2&\cdots&1+x_n^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&-1&\cdots&-1\\1&x_1&x_1^2&\cdots&x_1^n\\1&x_2&x_2^2&\cdots&x_2^n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_n&x_n^2&\cdots&x_n^2\end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^2 \end{vmatrix}
$$

$$
= 2\prod_{i=1}^{n} x_i \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i) - \prod_{i=1}^{n}(x_i - 1)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)
$$

$$
= \left[2\prod_{i=1}^{n} x_i - \prod_{i=1}^{n}(x_i - 1)\right]\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i).
$$

四、(10 分) 见第 2 章范例精讲中例 19(2)的解答.

五、(10 分) 因为 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵,所以对任意 n 维非零列向量 $\boldsymbol{x}$,有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$. 设存在 m 个常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得

$$
k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{0},
$$

两边左乘以 $\boldsymbol{A}$,得

$$
k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{0},
$$

两边左乘以$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,m)$,由条件$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j=0(i\neq j)$,即知 $k_i\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=0(i=1,2,\cdots,m)$. 由于$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i>0$,因此 $k_i=0(i=1,2,\cdots,m)$,故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

六、(10 分) 矩阵方程 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{X}$,可化为

$$
(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}).
$$

因$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$,故 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 不可逆. 但 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 可逆,从而 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E})$,即知

$$
\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) = \mathrm{rank}[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}],
$$

所以矩阵方程有解. 对其增广矩阵做初等行变换,得

$$
[\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 2 & 18 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

得齐次线性方程组$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解

$$
\boldsymbol{x} = k\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad k \text{ 为任意数},
$$

于是矩阵方程的解为

$$
\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix},\quad k_1,k_2,k_3 \text{ 为任意数}.
$$

七、(12 分) (1) 当 $k\neq 2$ 时,$\mathrm{rank}\boldsymbol{B}=2$. 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$ 知,$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=1$,则所求极大无关组为$\boldsymbol{\alpha}_1$. 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$ 有

$$
\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + k\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}, \\ 2\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 4\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}, \end{cases}
$$

即$(4-2k)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$,而 $k\neq 2$,故$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1$.

(2) 当 $k=2$ 时，$\text{rank}\boldsymbol{B}=1$. 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$ 知 $1\leqslant\text{rank}\boldsymbol{A}\leqslant 2$，$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$.

若 $\text{rank}\boldsymbol{A}=1$，则所求极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，且 $\boldsymbol{\alpha}_2=c\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3=-\dfrac{1}{2}(c-1)\boldsymbol{\alpha}_1$，$c$ 为常数；

若 $\text{rank}\boldsymbol{A}=2$，则必有 $\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，否则由 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$ 知 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，与 $\text{rank}\boldsymbol{A}=2$ 矛盾，从而所求极大无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$.

八、(12 分) 见第 6 章范例精讲中例 16 的解答.